Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Mecânica II
Segunda Lista de Exercícios
Data de entrega: 19 maio de 2022.

Prof. J. C. A. Barata

---

1) Sejam $\vec{\mathsf{J}} = (\mathsf{J}_1,\ \mathsf{J}_2,\ \mathsf{J}_3)$ os geradores usuais do grupo SO(3):

$$\mathsf{J}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{J}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{J}_3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando a relação $R(\theta,\, \vec{\eta})\Big(\vec{\alpha}\cdot\vec{\mathsf{J}}\Big)R\big(-\theta,\, \vec{\eta}\big) = \Big(R(\theta,\, \vec{\eta})\vec{\alpha}\Big)\cdot\vec{\mathsf{J}}$ e a fórmula de Rodrigues, mostre que

$$R(\theta,\, \vec{\eta})\Big(\vec{\alpha}\cdot\vec{\mathsf{J}}\Big)R\big(-\theta,\, \vec{\eta}\big) = \cos(\theta)\Big(\vec{\alpha}\cdot\vec{\mathsf{J}}\Big) + \big(1-\cos(\theta)\big)\big(\vec{\eta}\cdot\vec{\alpha}\big)\Big(\vec{\eta}\cdot\vec{\mathsf{J}}\Big) + \mathrm{sen}\,(\theta)\big(\vec{\eta}\times\vec{\alpha}\big)\cdot\vec{\mathsf{J}}\,. \tag{1}$$

Essa relação é particularmente útil no caso em que $\vec{\alpha}$ e $\vec{\eta}$ são vetores da base canônica $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Mostre com ela que

$$R_k(\theta)\mathsf{J}_l R_k(-\theta) = \Big(\delta_{k,\,l} + (1-\delta_{k,\,l})\cos(\theta)\Big)\mathsf{J}_l + \mathrm{sen}\,(\theta)\sum_{m=1}^{3}\varepsilon_{klm}\mathsf{J}_m\,, \tag{2}$$

tomando $\vec{\eta} = \mathbf{e}_k$ e $\vec{\alpha} = \mathbf{e}_l$ na relação (1), com $k,\ l \in \{1,\ 2,\ 3\}$.

---

2) Considere um corpo rígido de massa M que se move de sorte que um de seus pontos, o, esteja fixo em relação a um sistema de referência inercial. Seja Q_o o vetor posição desse ponto no sistema de referência do corpo rígido (cuja origem é seu centro de massa). Mostre que as componentes do tensor momento de inércia I_o desse sistema são dadas por

$$(I_o)_{ab} = (I_{cm})_{ab} + M\big(\|Q_o\|^2\delta_{ab} - (Q_o)_a(Q_o)_b\big)\,,$$

para $a,\ b \in \{1,\ 2,\ 3\}$, onde I_{cm} é o tensor momento de inércia em relação ao centro de massa. *Sugestão*: escreva a energia cinética total do sistema levando em conta que a velocidade do centro de massa no sistema inercial no qual o ponto o esteja fixo é dada por $\dot{q}_{cm} = -R_t\big(\Omega_t \times Q_o\big)$. Prove esse fato.

---

3) Enuncie e demonstre o *Teorema dos Eixos Paralelos.*

---

4) O vetor velocidade angular instantânea intrínseca de um corpo rígido é definido por $\Omega_t\cdot\vec{\mathsf{J}} = R_t^{-1}\dot{R}_t$ com $\vec{\mathsf{J}} = (\mathsf{J}_1,\ \mathsf{J}_2,\ \mathsf{J}_3)$ sendo os geradores do grupo SO(3) e onde $R_t \in \mathrm{SO}(3)$ realiza, em cada instante de tempo t, a rotação do sistema de referência $\mathbf{K}$, fixo no corpo rígido considerado, a um sistema de referência inercial $\mathbf{k}$. Escrevamos R_t em termos de *ângulos de Euler*: $R_t = R_3(\varphi_t)R_1(\theta_t)R_3(\psi_t)$. Mostre que

$$\dot{R}_t = \dot{\varphi}_t\mathsf{J}_3R_3(\varphi_t)R_1(\theta_t)R_3(\psi_t) + \dot{\theta}_tR_3(\varphi_t)R_1(\theta_t)\mathsf{J}_1R_3(\psi_t) + \dot{\psi}_tR_3(\varphi_t)R_1(\theta_t)R_3(\psi_t)\mathsf{J}_3\,.$$

Usando repetidamente a relação (2), mostre que

$$\Omega_t\cdot\vec{\mathsf{J}} = \Big(\dot{\varphi}_t\,\mathrm{sen}\,(\theta_t)\,\mathrm{sen}\,(\psi_t) + \dot{\theta}_t\cos(\psi_t)\Big)\mathsf{J}_1 + \Big(\dot{\varphi}_t\,\mathrm{sen}\,(\theta_t)\cos(\psi_t) - \dot{\theta}_t\,\mathrm{sen}\,(\psi_t)\Big)\mathsf{J}_2 + \Big(\dot{\varphi}_t\cos(\theta_t) + \dot{\psi}_t\Big)\mathsf{J}_3\,.$$

Concluímos disso que as componentes de Ω_t podem ser expressas em termos dos ângulos de Euler e suas derivadas como

$$\begin{aligned}
(\Omega_t)_1 &= \dot{\varphi}_t \operatorname{sen}(\theta_t) \operatorname{sen}(\psi_t) + \dot{\theta}_t \cos(\psi_t) , \\
(\Omega_t)_2 &= \dot{\varphi}_t \operatorname{sen}(\theta_t) \cos(\psi_t) - \dot{\theta}_t \operatorname{sen}(\psi_t) , \\
(\Omega_t)_3 &= \dot{\varphi}_t \cos(\theta_t) + \dot{\psi}_t .
\end{aligned}$$

Se os eixos de $\mathbf{K}$ coincidirem com eixos principais de inércia do corpo rígido considerado, a energia cinética rotacional desse corpo se escreve como $e_{cr} = \frac{1}{2}\Big(I_1(\Omega_t)_1^2 + I_2(\Omega_t)_2^2 + I_3(\Omega_t)_3^2\Big)$. No caso de um *pião simétrico*, ou seja, no caso em que $I_1 = I_2 \neq I_3$, expresse e_{cr} em termos dos ângulos de Euler e suas derivadas.

5) Um ponto material de massa m é solto de uma altura h medida a partir do solo. Considere que seu movimento se dá sob a ação da força peso e da força de Coriolis decorrente da rotação diurna da Terra (desprezando, portanto, a força centrífuga e forças de atrito com o ar). Qual o desvio do ponto de queda devido à força de Coriolis? Faça as aproximações que julgar necessárias. Estime numericamente esse desvio no caso em que $h = 10m$, com $g = 9,8m/s^2$ na latitude da cidade de São Paulo. E para $h = 1km$?