

Estados Coerentes

VAMOS definir um tipo de estados, por enquanto no caso do oscilador harmônico, chamados de estados coerentes. A forma mais direta de definir estados coerentes $|\alpha\rangle$ é

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$\Rightarrow$ estados coerentes são autoestados do operador de aniquilação a com autovalor α .

Dado que a não é um operador hermitiano, o autovalor α é ou seja um número complexo.

Podemos escrever o estado coerente como uma combinação dos autoestados da energia $\{|m\rangle\}$, i.e:

$$|\alpha\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_m |m\rangle$$

Onde os C_m são os coeficientes da projeção de $|\alpha\rangle$ na base $\{|m\rangle\}$.

MAS sabemos que

$$a|m\rangle = \sqrt{m!} |m-1\rangle$$

$$\Rightarrow a|\alpha\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \sqrt{m!} |m-1\rangle = a|\alpha\rangle$$

Comparando com

$$a|\alpha\rangle = a \sum_{m=0}^{\infty} C_m |m\rangle$$

e igualando os coeficientes de $|m\rangle$:

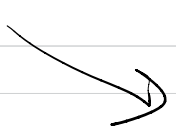
$$\Rightarrow C_{m+1} \sqrt{m+1} = a C_m$$

$$\text{ou } \left\{ C_{m+1} = \frac{a C_m}{\sqrt{m+1}} \right\}$$

O que dá uma relação recursiva para os coeficientes da expansão.

$$|\alpha\rangle = c_0 \left(|0\rangle + \frac{a|1\rangle}{\sqrt{1!}} + \frac{a^2|2\rangle}{\sqrt{2!}} + \frac{a^3|3\rangle}{\sqrt{3!}} + \dots \right)$$

$$\text{MAS, sabemos que } |m\rangle = \frac{(a^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} |0\rangle$$



$$|\alpha\rangle = C_0 \left(1 + \alpha \frac{a^\dagger}{1!} + \alpha^2 \frac{(a^\dagger)^2}{2!} + \frac{\alpha^3 (a^\dagger)^3}{3!} + \dots \right) |0\rangle$$

$$\Rightarrow \left\{ |\alpha\rangle = C_0 e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle \right\}$$

Finalmente, para obter C_0 , impomos a condição de normalização:

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$$

$$\Rightarrow |C_0|^2 \left\{ \langle 0 | \left(1 + \alpha^* \frac{a}{1!} + \frac{\alpha^{*2} (a)^2}{2!} + \dots \right) \right.$$

$$\left. \left(1 + \alpha \frac{a^\dagger}{1!} + \frac{\alpha^2 (a^\dagger)^2}{2!} + \dots \right) |0\rangle \right\}$$

$$= |C_0|^2 \langle 0 | \left(1 + \frac{|\alpha|^2}{1!} + \frac{(|\alpha|^2)^2}{2!} + \dots \right) |0\rangle$$

$$= |C_0|^2 e^{|\alpha|^2} = 1 \Rightarrow \left\{ C_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \right\}$$

$$\Rightarrow |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle$$

Algumas Propriedades dos Estados coerentes

• Valor esperado da Energia

$$\langle H \rangle_\alpha = \langle \alpha | H | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hbar \omega (a^\dagger a + \frac{1}{2}) | \alpha \rangle$$

$$\text{MAS } a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \Rightarrow \\ \langle \alpha | a^\dagger = \alpha^* \langle \alpha |$$

$$\Rightarrow \langle H \rangle_\alpha = \hbar \omega (|\alpha|^2 + \frac{1}{2})$$

• Operador de Troca de Fase

$$U(\theta) \equiv e^{-i\theta N} \quad N = a^\dagger a$$

$$\begin{cases} U(\theta) a U(\theta) = a e^{-i\theta} \\ U(\theta) a^\dagger U(\theta) = a^\dagger e^{i\theta} \end{cases} \quad \text{or}$$

Prova:

$$\frac{d(U^\dagger(\theta) a U(\theta))}{d\theta} = \frac{d(a e^{-i\theta})}{d\theta}$$

$$i N U^\dagger a U - i U^\dagger a N U$$

$$= i U^\dagger [N, a] U = -i a e^{-i\theta}$$

$$= -i U^\dagger a U = -i a e^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow \left\{ U^\dagger(\theta) a U(\theta) = a e^{-i\theta} \right\} \text{ QED}$$

• O operador $U(\theta)$ muda a fase de um estado coerente $|\alpha\rangle$ de acordo com

$$U(\theta) |\alpha\rangle = |\alpha e^{-i\theta}\rangle$$

$$\Rightarrow a |\alpha e^{-i\theta}\rangle = \alpha e^{-i\theta} |\alpha e^{-i\theta}\rangle$$

Prova: Foi mais ou menos verificado que $U(\theta)$ é unitário:

$$U^\dagger(\theta) U(\theta) = e^{+i\theta N} e^{-i\theta N}$$

$$(a^\dagger a)^\dagger = a^\dagger a$$

$$\Rightarrow U(\theta) = e^{i \text{Hermitian}} / U^\dagger(\theta) U(\theta) = \mathbb{1}$$

$$\left(1 + i\theta a^\dagger a + \frac{(i\theta)^2 (a^\dagger a)^2}{2!} + \dots\right) \left(1 - i\theta a^\dagger a + \frac{(-i\theta)^2 (a^\dagger a)^2}{2!} + \dots\right)$$

$$= 1 + i\theta a^\dagger a - i\theta a^\dagger a + \theta^2 (a^\dagger a)^2 - \frac{2\theta^2 (a^\dagger a)^2}{2!} + \dots$$

$$= 1 \checkmark$$

$$\Rightarrow |\alpha\rangle = U^\dagger(\theta) U(\theta) |\alpha\rangle$$

$$U(\theta) a |\alpha\rangle = U(\theta) a U^\dagger(\theta) U(\theta) |\alpha\rangle$$

$$\propto U(\theta) |\alpha\rangle = \alpha e^{i\theta} U(\theta) |\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \alpha U(\theta) |\alpha\rangle = \alpha e^{-i\theta} U(\theta) |\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U(\theta) |\alpha\rangle \text{ é um autovetor de } a \\ \text{com autovalor} \\ \alpha' = \alpha e^{-i\theta} \end{array} \right\}_{QED}$$

Estados coerentes são usados para descrever ondas eletromagnéticas produzidas por fontes coerentes como LASERS.

Num estado coerente o número n de fótons NÃO é fixo.

No estado coerente:

- Todos os fótons tem a mesma frequência (comprimento de onda) e
- Todos tem a mesma fase

Para ver esse último ponto se escrevemos

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

e assumimos que α é inicialmente real, temos que

$$U(\theta) |\alpha\rangle = |\alpha e^{-i\theta}\rangle$$

$\Rightarrow$ todos os estados de fótons $|n\rangle$ e $|\alpha e^{-i\theta}\rangle$ tem a mesma fase $e^{-i\theta}$!

Distribuição de Probabilidade no Estado Coerente

Queremos saber qual a probabilidade de ter m fótons num estado coerente $|\alpha\rangle$

$$P(m) = |\langle m | \alpha \rangle|^2$$

$$= |\langle m | \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle|^2$$

$$P(m) = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2m}}{m!}$$

Por outra parte, o valor esperado (médio) de N no estado coerente $|\alpha\rangle$ é dado por

$$\bar{n} \equiv \langle \alpha | N | \alpha \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle$$

$$\Rightarrow \bar{n} = |\alpha|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{P(m) = \frac{e^{-\bar{n}} \bar{n}^m}{m!}} \rightarrow \text{Poisson!}$$

⇒ Estados coerentes de fótons obedecem a estatística de Poisson. Reparamos um número aleatório de um conjunto que tem um número médio $\bar{n} = |\alpha|^2$.

⇒ A estatística dos fótons num estado coerente é a de partículas clássicas.

Produto interno de estados coerentes:

Consideremos estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle; \quad |\beta\rangle = e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} e^{\beta a^\dagger} |0\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle\beta|\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \langle 0 | e^{\beta^* a} e^{\alpha a^\dagger} | 0 \rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \langle 0 | (1 + \beta^* a + \frac{(\beta^* a)^2}{2!} + \dots) (1 + \alpha a^\dagger + \frac{(\alpha a^\dagger)^2}{2!} + \dots) | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} (1 + \beta^* \alpha + \frac{(\beta^* \alpha)^2}{2!} + \dots)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} e^{\beta^* \alpha} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha - \beta|^2}$$

$$\Rightarrow \langle\beta|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha - \beta|^2} \neq 0$$

⇒ Estados coerentes não são ortogonais

MAS, por outra parte: $\boxed{\langle\alpha|\alpha\rangle = 1}$

Estados coerentes são de Interestegia Mínima

Queremos calcular as dispersões $(\Delta X)^2$ e $(\Delta P)^2$ num estado coerente $|\alpha\rangle$

$\Rightarrow$ Lembremos

$$\left. \begin{aligned} a &= \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} \left(X + \frac{iP}{m\omega}\right) \\ a^\dagger &= \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} \left(X - \frac{iP}{m\omega}\right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow X &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} (a + a^\dagger) \\ P &= -i \left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right) (a - a^\dagger) \end{aligned} \right\}$$

$$\langle X \rangle = \langle \alpha | X | \alpha \rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} \langle \alpha | a + a^\dagger | \alpha \rangle$$

$$\Rightarrow \left\{ \langle X \rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} (\alpha + \alpha^*) \right\} \quad * \quad \langle \alpha | \alpha \rangle = 1$$

$$\langle X^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \alpha | a^{\dagger 2} + a^2 + \underbrace{a^{\dagger}a + a a^{\dagger}}_{=1+a^{\dagger}a} | \alpha \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \alpha | a^{\dagger 2} + a^2 + 2a^{\dagger}a + 1 | \alpha \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left\{ (\alpha^*)^2 + \alpha^2 + 2\alpha^*\alpha + 1 \right\} \langle \alpha | \alpha \rangle \end{aligned}$$

$$\left\{ \langle X^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \left\{ 1 + (\alpha + \alpha^*)^2 \right\} \right\}$$

$$\Rightarrow (\Delta X)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \left\{ 1 + (\alpha + \alpha^*)^2 - (\alpha + \alpha^*)^2 \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta X)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$\langle P \rangle = -i \left(\frac{\hbar m \omega}{2} \right)^{1/2} \langle \alpha | a - a^{\dagger} | \alpha \rangle$$

$$\Rightarrow \left\{ \langle P \rangle = -i \left(\frac{\hbar m \omega}{2} \right)^{1/2} (\alpha - \alpha^*) \right\}$$

Entanto free

$$\langle \hat{P}^2 \rangle = - \left(\frac{\hbar m \omega}{2} \right) \langle \alpha | a^2 + a^{\dagger 2} - a a^{\dagger} - a^{\dagger} a | \alpha \rangle$$

$$= - \left(\frac{\hbar m \omega}{2} \right) \langle \alpha | a^2 + a^{\dagger 2} - 2a^{\dagger} a - 1 | \alpha \rangle$$

$$\langle P^2 \rangle = - \left(\frac{\hbar m \omega}{2} \right) \left\{ (\alpha - \alpha^*)^2 - 1 \right\}$$

$$\Rightarrow (\Delta P)^2 = \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2 = \frac{\hbar m \omega}{2}$$

$$\Rightarrow (\Delta X)^2 (\Delta P)^2 = \frac{\hbar}{2 m \omega} \frac{\hbar m \omega}{2} = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\Rightarrow \Delta X \cdot \Delta P = \frac{\hbar}{2}$$

Estados coerentes
são estados de
incerteza
mínima.

Estados coerentes na base da Posição $\{|x\rangle\}$