Instantons

São soluções não triviais em teorias de Yang-Mills em 4 dimensões, mas 4 dimensões Euclideanas (mais para frente ficará claro porque Euclideanos, mas a resposta rápida é que os grupos de interesse, ou seja grupos de Lie compactos, tem essas soluções em 4D Euclideanos, não em Minkowski).

Ação de Yang-Mills no Euclideano

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} \text{ ou } \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} \quad i,j = 1, \dots 4$$

Com esse sinal teremos ($S_E = S$)

$$e^{iS_M} \longrightarrow e^{-S_E} \quad \text{com } x_0 \longrightarrow -i x_4$$

Queremos obter soluções de ação finita.

A razão é que essas soluções são aproximações semiclássicas e então configurações de $S = \infty$ perto da solução clássica Gaussiana são suprimidas como e^{-S}

A convergência de S depende exclusivamente ②

do comportamento do $A_\mu \equiv A_\mu^a t^a$ para $r \to \infty$.

Precisamos que $F_{\mu\nu} \to 0 + O(\frac{1}{r^3})$

Mas isto não quer dizer $A_\mu \to 0 + O(\frac{1}{r^2})$

Dado que "0" é dependente do gauge.

Lembrando que, se $\{g\} \in G$

$$A_\mu \longrightarrow g(x) A_\mu g^{-1}(x) + \frac{i}{g} g(x) \partial_\mu g^{-1}(x)$$

Começando de "0", precisamos que para $r \to \infty$

$$A_\mu \longrightarrow \frac{i}{g} g(x) \partial_\mu g^{-1}(x) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

(Por conveniência, vamos redefinir

$$A_\mu \to -i g A_\mu$$

$$\Rightarrow A_\mu \to g(x) A_\mu g^{-1}(x) + g(x) \partial_\mu g^{-1}(x)$$

$\Rightarrow$ Para $r \to \infty$

$$A_\mu \to g(x)\,\partial_\mu g^{-1}(x) + O(1/r^2)$$

$\Rightarrow$ $g(x) \xrightarrow{r\to\infty} g(\hat{x})$: mapeamento do Grupo G com θ, φ, χ as variáveis angulares em 4D Euclideanas $(r \to {}^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \to \infty)$

$\Rightarrow$ $\{$Mapeamento na esfera em 4D : $S_3\}$

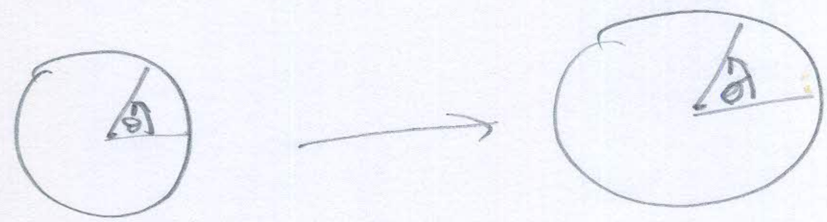
Dado que $g(\hat{x})$ são continuamente diferenciáveis

$\rightarrow$ $\{$ transformações de Gauge atúam como homotopias: não podem trocar um $A_\mu(x)$ de uma classe de homotopia para outra.

Em geral, para ter soluções não triviais, estáveis, de energia finita em 4D Euclideana precisamos de G / $\pi_3(G) \neq 0$.

Aparte sobre mappings

$S_1 \to S_1$ $\quad$ $\pi_1(U(1))$



$$\{\theta\} \longrightarrow \{e^{i\theta}\}$$

Classe homotópica

$$f(\theta) = e^{i(m\theta + a)} \qquad \begin{cases} a: \text{constante} \\ m: \text{inteiro} \end{cases}$$

$$\text{Ex:} \begin{cases} f_0(\theta) = e^{i(m\theta + \theta_0)} \\ f_1(\theta) = e^{i(m\theta + \theta_1)} \end{cases}$$

pertencem à mesma classe de homotopia dado que existe $F(\theta, s)$ (homotopia) que satisfaz

$$F(\theta, 0) = f_0(\theta)$$
$$F(\theta, 1) = f_1(\theta)$$

Ej: $F(\theta, s) = e^{i(m\theta + (1-s)\theta_0 + s\theta_1)}$

$\Rightarrow$

classes de homotopia definidas por $\underline{\underline{m}}$

$\underline{\underline{m}}$: winding number ou índice de Pontryagin.

$$\left\{\begin{array}{l} \theta: 0 \longrightarrow 2\pi \\ \sigma: m \times (0 \longrightarrow 2\pi) \end{array}\right\}$$

Podemos expressar m como:

$$m = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} (-i) f^{-1}(\theta) \frac{df(\theta)}{d\theta}$$

Mapeamento de $m = 1$

$$f^{(1)}_{(\theta)} \equiv e^{i\theta}$$

($a = 0$ ou $\neq 0$ é ainda a mesma classe!)

Claramente, podemos obter mapeamentos de $m > 1$ a partir desse.

$$f^{(m)}_{(\theta)} = \left[f^{(1)}_{(\theta)}\right]^m$$