Configurações Estendidas (II)

Consideramos uma teoria de Gauge em 2+1 dimensões (em 3+1 a extensão é trivial)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - V(\phi)$$

invariante de Gauge sob transformações do G.
O potencial tem zeros ϕ_0 que correspondem ao estado fundamental da teoria (os campos de Gauge podem ser $= \emptyset$ por transformações de gauge).

Para simplificar podemos trabalhar no gauge temporal

$$A^a_0 = 0$$

Isto é fisicamente irrelevante, mas simplifica as contas.

Ej: $\quad D_0 \phi = \partial_0 \phi$

$$F^a_{0i} = \partial_0 A^a_i$$

A energia então vira:

$$\mathcal{H} = T + V = \int d^d x \left\{ \frac{1}{4}(\partial_0 A_i^a)^2 + \partial_0\phi^\dagger \partial_0\phi \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a + \vec{D}\phi^\dagger \cdot \vec{D}\phi + V(\phi) \right\}$$

Onde usamos

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} \partial_0\phi - \mathcal{L} \qquad \text{para } \phi, A_i^a$$

Queremos achar soluções de energia finita para um tempo fixo $\rightarrow$ jogar fora a dependência temporal.

Para que a energia seja finita deve existir

$$\lim_{r\to\infty} \phi(r,\theta) = \phi(\infty,\theta) \qquad (\text{em } \underline{2D})$$

e devem ser zeros do potencial $V(\phi)$.

Isto porque (em 2+1D)

$$E \geq \int_{0^+}^{\infty} r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \vec{D}\phi^\dagger \cdot \vec{D}\phi + V(\phi) \right\}$$

$\Rightarrow V(\phi(\infty,\theta)) = 0$ garante que $\lim_{r\to\infty} \int_{0^+}^{\infty} r\,dr\, V(\phi)$

não diverge.

Mas ainda temos o termo com os gradientes (covariantes).

<u>A questão é</u> :

Pode ser que $\phi(\infty,\theta)$ tenha uma dependência não-trivial em θ?

se fosse

$$\vec{\nabla}\phi^\dagger \cdot \vec{\nabla}\phi$$

a resposta seria não, dado que

$$\lim_{r\to\infty} \vec{\nabla}\phi = \frac{1}{r}\frac{d\phi(\infty,\theta)}{d\theta}\,\hat{e}_\theta \qquad \left(\frac{d\phi(\infty,\theta)}{dr} \to 0\right)$$

MAS se $\frac{d\phi(\infty,\theta)}{d\theta} \neq 0$ a integral

$$\int_{0^+}^{\infty} r\,dr\,\frac{1}{r}\frac{d\phi(\infty,\theta)}{d\theta} \quad \text{diverge.}$$

O que precisamos é um cancelamento na derivada covariante. Em particular

$$\hat{e}_\theta \cdot \vec{D}\phi = \frac{1}{r}\frac{d\phi}{d\theta} + i g A^a_\theta t^a \phi$$

$$\Rightarrow \left\{ \lim_{r\to\infty} r A^a_\theta t^a \phi(r,\theta) = -\frac{i}{g}\frac{d\phi(\infty,\theta)}{d\theta} \right\}$$

Isto implica que A^a_θ dever ir (para $r\to\infty$) como

$$\lim_{r\to\infty} A^a_\theta \sim \frac{1}{r}$$

o $F_{\mu\nu} \sim \frac{1}{r^2} \rightarrow F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \sim \frac{1}{r^4}$

o que daria uma contribuição finita a

$$\int_{0^+}^{\infty} r\,dr\,\frac{1}{r^4}$$

Todo pode ser estendido a 3+1D
Com ϕ agora $\phi(r,\theta,\varphi)$ dado que

$$\int_{0^+}^{\infty} r^2 dr\, F_{ij}^a F_{ij}^a$$ ainda é finito.

Não pode ir além de 3+1D.

Conclusão:

Supondo condições iniciais não-divergentes (i.e. dependência temporal, $\partial_0\phi$, etc) cada conjunto dessas condições iniciais tem uma função $\phi(\infty,\theta)$ associada.

- $\phi(\infty,\theta)$ é um mapeamento do círculo S_1 no Grupo G/H, dado que esses valores correspondem com zeros de $V(\phi)$ (mínimo de V!)

$\phi(\infty,\theta)$ é um conjunto contínuo de valores de ϕ que é degenerado e minimiza $V(\phi) \Rightarrow G/H$.