Anomalias (III) Derivação na Integral Funcional (1)

(L22)

Simetrias e Correntes na Integral Funcional

Temos em geral

$$Z[j] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{i\int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\phi) + j(x)\phi(x) \right\}}$$

e $$\langle 0 | T\, \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) | 0 \rangle = (-i)^n \left. \frac{\delta^n \ln Z[j]}{\delta \phi(x_1) \ldots \delta \phi(x_n)} \right|_{j=0}$$

Podemos também acoplar uma corrente J_μ a uma fonte externa:

$$Z[j, f_\mu] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{i\int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\phi) + j(x)\phi(x) + f_\mu(x) J^\mu(x) \right\}}$$

tal que

$$\bar{J}^\mu(x) = (-i) \left. \frac{\delta \ln Z}{\delta f_\mu(x)} \right|_{f_\mu = 0} = \langle 0 | J^\mu(x) | 0 \rangle$$

Derivadas funcionais adicionais permitem obter elementos de matriz da corrente com campos ou outras correntes.

Por exemplo, se temos correntes axiais e vetoriais com fontes a_μ e v_μ respectivamente

$$Z[v_\mu, a_\mu] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu \, e^{i\int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, A_\mu) + v_\mu J_V^\mu + a_\mu J_A^\mu \right\}}$$

$$\Rightarrow \langle 0 | T \, J_A^\mu(x) \, J_V^\nu(y) \, J_V^\alpha(z) | 0 \rangle = (-i)^2 \frac{\delta^2 \, \bar{J}_A^\mu(x)}{\delta v_\nu(y) \, \delta v_\alpha(z)}$$

Em particular, $\bar{J}^\mu(x)$ é agora a versão quântica da corrente. Então a conservação de $\bar{J}^\mu(x)$

$$\partial_\mu \bar{J}^\mu(x) = 0$$

é uma lei de conservação quântica.

Teorema de Noether e a Integral Funcional

Consideremos uma transformação infinitesimal do campo

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x) + \varepsilon(x) F(\phi)$$

onde $F(\phi)$ é uma função dos campos da teoria e tipicamente contém informação sobre a simetria (e.g: geradores, ...)

Aqui estamos considerando ε como função de x mas no fim vamos assumir que é uma constante e que a simetria é global.

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\overbrace{\varepsilon F(\phi)}^{\delta\phi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\overbrace{\partial_\mu(\varepsilon F(\phi))}^{\delta(\partial_\mu\phi)}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\varepsilon F(\phi) - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\varepsilon F(\phi)}_{=0 \text{ by Euler-Lagrange}} + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\varepsilon F(\phi)\right)$$

Em geral se ε é constante

$$\mathcal{L}(\phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi) + \underbrace{\varepsilon\, \partial_\mu \mathcal{J}^\mu}_{\text{derivada total}}$$

Mas se ε depende de x_μ:

$$\mathcal{L}(\phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi') = \mathcal{L}(\phi) + \partial_\mu \varepsilon(x)\, F(\phi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}$$

$$+ \varepsilon\, \partial_\mu \mathcal{J}^\mu$$

A corrente (a menos de uma derivada total) é

$$j^\mu = F(\phi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \quad \text{ou} \quad \boxed{J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi')}{\partial(\partial_\mu \varepsilon)}}$$

a menos de um termo $(-\mathcal{J}^\mu)$ que vem de

$$\varepsilon\, \partial_\mu \mathcal{J} = \partial_\mu (\varepsilon \mathcal{J})$$

$$\rightarrow J^\mu = F(\phi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \mathcal{J}^\mu$$

$\Rightarrow$ Podemos escrever que

$$\mathcal{L}(\phi') = \mathcal{L}(\phi) + J^\mu \partial_\mu \varepsilon$$

$\Rightarrow \begin{cases} \bullet \text{ se } \varepsilon \text{ é constante } \mathcal{L}(\phi') = \mathcal{L}(\phi) \\ \bullet \text{ se } \varepsilon = \varepsilon(x) \text{, mas } \partial_\mu J^\mu = 0 \Rightarrow \text{ ok (int. by parts)} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Podemos rescrever a corrente: derivada de int. funcional

$$\bar{J}^\mu(x) = (-i) \left.\frac{\delta \ln Z}{\delta f_\mu(x)}\right|_{f_\mu = 0} \qquad \text{com}$$

$$\delta \ln Z[f_\mu] = \ln Z[f_\mu + \delta f_\mu] - \ln Z[f_\mu]$$

$$= i \int d^4x\, \bar{J}^\mu(x)\, \delta f_\mu(x)$$

Se agora escolhemos

$$\delta f_\mu(x) \equiv \partial_\mu \varepsilon(x)$$

$$\Rightarrow \delta_\epsilon \ln Z[f_\mu] \equiv \ln Z[f_\mu + \partial_\mu \varepsilon) - \ln Z[f_\mu]$$

$$= i \int d^4x \, \bar{J}^\mu(x) \, \partial_\mu \varepsilon(x)$$

$$= -i \int d^4x \, \partial_\mu \bar{J}^\mu(x) \, \varepsilon(x)$$

$$\Rightarrow \left\{ \text{Se} \quad Z[f_\mu + \partial_\mu \varepsilon] = Z[f_\mu] \Rightarrow \partial_\mu \bar{J}^\mu(x) = 0 \right\}$$

Para verificar isso, vemos que

$$Z[f_\mu + \partial_\mu \varepsilon] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{i \int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\phi) + (f_\mu + \partial_\mu \varepsilon) J^\mu(x) \right\}}$$

mas $\mathcal{L}(\phi) + \partial_\mu \varepsilon J^\mu = \mathcal{L}(\phi')$

com $\phi'(x) = \phi(x) + \varepsilon(x) F(\phi)$

$$\Rightarrow Z[f_\mu + \partial_\mu \varepsilon] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{i \int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\phi') + f_\mu J^\mu \right\}}$$