Quebra espontânea de uma Simetria Local ①

L13

Consideremos um campo escalar complexo ϕ. A sua Lagrangeana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^* D^\mu \phi - V(\phi^*\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

onde

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ie A_\mu$$

A Lagrangeana é invariante sob as transformações

$$\begin{cases} \phi_{(x)} \to e^{i\alpha(x)} \phi_{(x)} \\ A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \end{cases}$$

Ou seja, $\mathcal{L}$ é invariante sob transformações $U(1)$ locais. $A_\mu(x)$ é o bóson de gauge da simetria $U(1)$

com $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

Até aqui, tudo é independente da forma de $V(\phi^*\phi)$

Se assumimos o potencial é dado por

$$V(\phi^*\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^*\phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi)^2$$

então para $\mu^2 < 0$, ou com $m^2 = -\mu^2 > 0$

teremos que o potencial

$$V(\phi^*\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi^*\phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi)^2$$

tem um mínimo não trivial para $\phi_0 \neq 0$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \phi^*\phi}\right|_{\phi_0} = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi)_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\phi^*\phi)_0 = \frac{m^2}{\lambda} = v^2$$

é o

$$\langle 0|\phi^*\phi|0\rangle = v^2$$

$\Rightarrow$ Devemos, como sempre, expandir $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ ao redor do verdadeiro vácuo da teoria.

Escolhemos (arbitrariamente)

$$\langle\phi_1\rangle = v \quad , \quad \langle\phi_2\rangle = 0$$

Expandindo ao redor desse vácuo

$$\phi(x) = v + \eta(x) + i\xi(x)$$

Então, o potencial será idêntico ao caso da simetria U(1) global

$$V(\phi^\dagger\phi) = V(\phi_1^2+\phi_2^2) = V((v+\eta)^2+\xi^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_\eta = \sqrt{2}\, m = \sqrt{2\lambda}\, v \\ m_\xi = 0 \end{cases}$$ tal como no caso U(1) global

simetria U(1) é espontaneamente quebrada

A diferença está no termo cinético para ϕ:

$$\frac{1}{2}(D_\mu\phi)^*D^\mu\phi$$

$$\frac{1}{2}(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) = \frac{1}{2}\Big\{\partial_\mu\eta - i\partial_\mu\xi - ieA_\mu(v+\eta-i\xi)\Big\}$$

$$* \Big\{\partial^\mu\eta + i\partial^\mu\xi + ieA^\mu(v+\eta+i\xi)\Big\}$$

$$= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\,\partial^\mu\eta + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\,\partial^\mu\xi + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu$$

$+ evA_\mu\partial^\mu\xi$ + termos de interação quárticos e cúbicos.

Consequências

1. $M_A^2 = e^2v^2$! Bóson de gauge adquire massa $\boxed{M_A = eV}$

2. Claramente A_μ e ξ não são autoestados físicos dado que se misturam pelo termo

$$evA_\mu\partial^\mu\xi$$

Mas esse termo pode ser removido por uma transformação de gauge:

Em particular:

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha$$

com a escolha

$$\alpha(x) = -\frac{1}{v}\xi(x)$$

$$\Rightarrow \left\{ A_\mu(x) \Rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{ev}\partial_\mu \xi \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ A_\mu = A'_\mu - \frac{1}{ev}\partial_\mu \xi \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} D_\mu \phi^{\dagger} D^\mu \phi = \frac{1}{2}\partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{2}\partial_\mu \xi \partial^\mu \xi$$

$$+ \frac{1}{2} e^2 v^2 \left(A'_\mu - \frac{1}{ev}\partial_\mu \xi\right)\left(A'^\mu - \frac{1}{ev}\partial^\mu \xi\right)$$

$$+ ev \left(A'_\mu - \frac{1}{ev}\partial_\mu \xi\right)\partial^\mu \xi \quad + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\partial_\mu \eta\, \partial^\mu \eta - \frac{1}{2}\partial_\mu \xi\, \partial^\mu \xi$$

$$+ \frac{1}{2}e^2 v^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu \xi\, \partial^\mu \xi - \frac{1}{2}\frac{e^2 v^2}{ev} \times 2 \times A'_\mu \partial^\mu \xi$$

$$+ evA'_\mu \partial^\mu \xi - \partial_\mu \xi\, \partial^\mu \xi + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\partial_\mu \eta\, \partial^\mu \eta + \frac{1}{2}e^2 v^2 A'_\mu A'^\mu + \ldots$$

⇒ 1. Termo de mistura $\partial_\mu \xi A^\mu$ eliminado pela transformação de Gauge.

⇒ A'_μ é um estado físico

og $A_\mu \sim\circ - \xi -$ não ocorre!

2. $\xi(x)$ desaparece! É "eliminado" da ~~teoria~~.

- Não tem termo cinético (não se propaga)
- Conferir que também desaparece dos outros termos (mais fácil de ver isto depois)