Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Curso de Grupos e Tensores
Segunda Lista de Exercícios
Data de entrega: 03 de junho de 2021

Prof. J. C. A. Barata

Apenas os exercícios indicados por $(*)$ são de entrega obrigatória.

---

1) $(*)$ Considere o chamado *grupo de Heisenberg*[1], $\mathrm{GH}_3(\mathbb{C})$, cujos elementos são da forma

$$H(a,\ b,\ c) \ = \ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

onde $a,\ b,\ c \in \mathbb{C}$. Mostre que vale

$$H(a,\ b,\ c)H(a',\ b',\ c') \ = \ H\big(a + a',\ b + b',\ c + c' + ab'\big) \ , \tag{1}$$

para todos $a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c' \in \mathbb{C}$ e conclua disso que essas matrizes de fato compõem um grupo em relação ao produto usual de matrizes. Obtenha

$$H(a,\ b,\ c)^{-1} \ = \ H(-a,\ -b,\ ab - c) \ . \tag{2}$$

Verifique que as matrizes $H_1(t) \ := \ H(t,\ 0,\ 0)$, $H_2(t) \ := \ H(0,\ t,\ 0)$, $H_3(t) \ := \ H(0,\ 0,\ t)$ satisfazem $H_j(t)H_j(t') = H_j(t + t')$ e $H_j(0) = \mathbb{1}$, $j = 1,\ 2,\ 3$. Assim, para cada j, as matrizes $H_j(t)$ representam subgrupos uniparamétricos de $\mathrm{GH}_3(\mathbb{C})$. Os geradores desses subgrupos são $\mathbf{h}_j \ := \ \frac{d}{dt}H_j(t)\big|_{t=0}$. Verifique que

$$\mathbf{h}_1 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{h}_2 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{h}_3 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e mostre explicitamente que para todo t vale

$$H_1(t) \ = \ e^{t\mathbf{h}_1} \ , \qquad H_2(t) \ = \ e^{t\mathbf{h}_2} \quad \text{e} \quad H_3(t) \ = \ e^{t\mathbf{h}_3} \ .$$

Considere o espaço vetorial das matrizes da forma

$$h(a,\ b,\ c) \ = \ \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{3}$$

onde $a,\ b,\ c \in \mathbb{C}$. Mostre que esse espaço vetorial é uma álgebra de Lie[2] em relação ao produto do comutador por valer

$$\Big[h\big(a,\ b,\ c\big),\ h\big(a',\ b',\ c'\big)\Big] \ = \ h\big(0,\ 0,\ ab' - a'b\big) \ . \tag{4}$$

[1]Werner Karl Heisenberg (1901–1976).
[2]Marius Sophus Lie (1842–1899).

Essa álgebra de Lie, denotada por $\mathrm{gh}_3(\mathbb{C})$, é denominada *álgebra de Heisenberg*. Considere os seguintes três elementos da álgebra de Heisenberg:

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \hbar = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{5}$$

Mostre que eles compõem uma base em $\mathrm{gh}_3(\mathbb{C})$ e que

$$[p,\ \hbar] = 0 , \qquad [q,\ \hbar] = 0 , \qquad [p,\ q] = -i\hbar . \tag{6}$$

Essas relações, bem conhecidas da Mecânica Quântica, justificam o uso do nome de Heisenberg[3] no presente contexto.

Mostre explicitamente que $h(a,\ b,\ c)^3 = 0$ para todos $a,\ b,\ c \in \mathbb{C}$ e, portanto, que

$$\exp\big(h(a,\ b,\ c)\big) = \mathbb{1} + h(a,\ b,\ c) + \frac{1}{2}h(a,\ b,\ c)^2 = \begin{pmatrix} 1 & a & c + \frac{ab}{2} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = H\left(a,\ b,\ c + \frac{ab}{2}\right) \tag{7}$$

e disso conclua que

$$H(a,\ b,\ c) = \exp\left(h\left(a,\ b,\ c - \frac{ab}{2}\right)\right) . \tag{8}$$

Assim, todo elemento do grupo de Heisenberg $\mathrm{GH}_3(\mathbb{C})$ pode ser escrito como exponencial de um elemento da álgebra de Heisenberg $\mathrm{gh}_3(\mathbb{C})$.

---

2) Seja G um grupo. O conjunto de todos os elementos de G que têm a propriedade de comutarem com todos os elementos de G é denominado o *centro* do grupo G e é frequentemente denotado por $\mathbf{Z}(G)$. Em símbolos:

$$\mathbf{Z}(G) := \{h \in G |\ hg = gh \text{ para todo } g \in G\} .$$

a. Mostre que $\mathbf{Z}(G)$ é sempre um sub-grupo Abeliano de G.

b. Determine o centro do grupo de Heisenberg GH_3.

---

3) $(*)$ Seja $n \in \mathbb{N}$ e sejam $\mathscr{A} := \big\{A(t) \in \mathrm{GL}(\mathbb{C},\ n),\ t \in \mathbb{R}\big\}$ e $\mathscr{B} := \big\{B(s) \in \mathrm{GL}(\mathbb{C},\ n),\ s \in \mathbb{R}\big\}$ dois subgrupos uniparamétricos de matrizes $n \times n$ (ou seja, tais que $A(t)A(t') = A(t+t')$, que $B(s)B(s') = B(s+s')$ e que $A(0) = B(0) = \mathbb{1}$). Suponha que valha

$$A(t)B(s) = B(e^{\lambda t}s)A(t) , \tag{9}$$

para todos $t,\ s \in \mathbb{R}$, com λ sendo uma constante. Mostre que o conjunto $\mathscr{C} := \big\{A(t)B(s),\ \ t,\ s \in \mathbb{R}\big\}$, composto por todos os possíveis produtos de elementos de $\mathscr{A}$ e de $\mathscr{B}$ (nessa ordem), forma um subgrupo de $\mathrm{GL}(\mathbb{C},\ n)$.

O grupo $\mathscr{C}$, acima, é denominado *grupo de Anosov*[4], e está relacionado a uma classe importante de sistemas dinâmicos hiperbólicos. A relação (9) é por vezes denominada *relação de Anosov*. A constante λ é denominada *constante de Lyapunov*[5], nesse contexto.

[3] Werner Karl Heisenberg (1901–1976).
[4] Dmitri Victorovich Anosov (1936–2014).
[5] Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857–1918).

Um exemplo concreto (com $\lambda = 1$) é fornecido pelas matrizes 3×3

$$A(t) \;=\; \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & -\operatorname{senh} t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{senh} t & 0 & \cosh t \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B(s) \;=\; \begin{pmatrix} 1+\frac{s^2}{2} & s & \frac{s^2}{2} \\ s & 1 & s \\ -\frac{s^2}{2} & -s & 1-\frac{s^2}{2} \end{pmatrix} .$$

Verifique que $A(t)A(t') = A(t+t')$, que $B(s)B(s') = B(s+s')$, que $A(0) = B(0) = \mathbb{1}$ e, mais importante, verifique que a propriedade (9) é satisfeita nesse caso, na forma $A(t)B(s) = B(e^t s)A(t)$, para todos $t,\ s \in \mathbb{R}$.

As matrizes $A(t)$ e $B(s)$, acima, são elementos do grupo de Lorentz[6] em $2+1$ dimensões (adote-se $c = 1$). As matrizes $A(t)$ implementam um "boost" de Lorentz na direção 2 e as matrizes $B(s)$ implementam as chamadas *translações horosféricas*, que são transformações de Lorentz que mantém invariante um raio de luz, no caso, o raio de luz que aponta na direção $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ do espaço-tempo. Um outro exemplo com matrizes 2×2 (também com $\lambda = 1$) é $A(t) = \left(\begin{smallmatrix} e^{-t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{smallmatrix}\right)$ e $B(s) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Verifique!

---

4) $(*)$ Seja $R\big(\theta,\ \vec{\eta}\big)$ o elemento do grupo SO(3) representando uma rotação em sentido anti-horário de um ângulo $\theta \in [0,\ \pi]$ em torno de um eixo definido por um vetor $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{\eta} = (\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)$, com $\|\vec{\eta}\| = 1$. Sabemos que $R\big(\theta,\ \vec{\eta}\big) = \exp\Big(\theta\vec{\eta}\cdot\vec{J}\Big)$, onde

$$\vec{\eta}\cdot\vec{J} \;:=\; \eta_1 J_1 + \eta_2 J_2 + \eta_3 J_3 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -\eta_3 & \eta_2 \\ \eta_3 & 0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{10}$$

Verifique que as matrizes $J_1,\ J_2$ e J_3 satisfazem as relações de comutação

$$[J_a,\ J_b] \;=\; \sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc}\, J_c\ . \tag{11}$$

Sejam $\vec{\alpha} = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{\beta} = (\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3) \in \mathbb{R}^3$. Usando (11), mostre que

$$\Big[\vec{\alpha}\cdot\vec{J},\ \vec{\beta}\cdot\vec{J}\Big] \;=\; \Big(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\Big)\cdot\vec{J}\ , \tag{12}$$

sendo que "$\times$" denota o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$.

Mostre que

$$R\big(\theta,\ \vec{\eta}\big) \;=\; \mathbb{1} + \big(1-\cos(\theta)\big)\Big(\vec{\eta}\cdot\vec{J}\Big)^2 + \operatorname{sen}(\theta)\Big(\vec{\eta}\cdot\vec{J}\Big)\ . \tag{13}$$

Por fim, para $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ arbitrário, mostre usando (13) que

$$R\big(\theta,\ \vec{\eta}\big)\vec{\alpha} \;=\; \vec{\alpha} + \big(1-\cos(\theta)\big)\Big(\vec{\eta}\times\big(\vec{\eta}\times\vec{\alpha}\big)\Big) + \operatorname{sen}(\theta)\,\vec{\eta}\times\vec{\alpha} \tag{14}$$

$$=\; \cos(\theta)\vec{\alpha} + \big(1-\cos(\theta)\big)\big(\vec{\eta}\cdot\vec{\alpha}\big)\,\vec{\eta} + \operatorname{sen}(\theta)\,\vec{\eta}\times\vec{\alpha}\ . \tag{15}$$

[6] Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928).

As importantes expressões (13) e (14)–(15) são denominadas *fórmulas de Rodrigues*[7] *para o grupo* SO(3).

---

5) $(*)$ O grupo SO(1, 1) é o grupo de matrizes M, reais 2×2, que satisfazem $M^{-1} = \eta M^T \eta$ e $\det(M) = 1$, onde $\eta := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

a. Mostre que

$$\mathrm{SO}(1,\ 1) \ = \ \left\{ M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{R},\ 2) \middle| \ \ M \ = \ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ com } a^2 - b^2 = 1,\ a,\ b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sugestão: Se $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{R},\ 2)$, onde $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ e $\det(A) = 1$ então $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$.

b. Mostre que SO(1, 1) tem duas componentes conexas, denotadas por $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$ e $\mathcal{L}_+^{\downarrow}$, a saber,

$$\mathcal{L}_+^{\uparrow} \ := \ \left\{ M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{R},\ 2) \middle| \ \ M \ = \ \begin{pmatrix} \sqrt{1+b^2} & b \\ b & \sqrt{1+b^2} \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{L}_+^{\downarrow} \ := \ \left\{ M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{R},\ 2) \middle| \ \ M \ = \ \begin{pmatrix} -\sqrt{1+b^2} & b \\ b & -\sqrt{1+b^2} \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R} \right\}.$$

c. Mostre que $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$ é um subgrupo de SO(1, 1), mas que $\mathcal{L}_+^{\downarrow}$ não é.

d. Parametrizando $b \in \mathbb{R}$ na forma $b = -\operatorname{senh}(z)$, com $z \in \mathbb{R}$, verifique que

$$\mathcal{L}_+^{\uparrow} \ = \ \left\{ M \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{R},\ 2) \middle| \ \ M \ = \ \begin{pmatrix} \cosh(z) & -\operatorname{senh}(z) \\ -\operatorname{senh}(z) & \cosh(z) \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}$$

e mostre que as matrizes

$$\mathcal{B}_1(z) \ := \ \begin{pmatrix} \cosh(z) & -\operatorname{senh}(z) \\ -\operatorname{senh}(z) & \cosh(z) \end{pmatrix}$$

$z \in \mathbb{R}$, satisfazem as condições $\mathcal{B}_1(0) = \mathbb{1}$ e $\mathcal{B}_1(z)\mathcal{B}_1(z') = \mathcal{B}_1(z + z')$, para todos $z,\ z' \in \mathbb{R}$.

e. Calcule o gerador $\mathcal{M}_1 := \frac{d}{dz}\mathcal{B}_1(z)\Big|_{z=0}$ e mostre que $\mathcal{B}_1(z) \ = \ \exp(z\mathcal{M}_1)$.

f. Definindo $v = \tanh(z)$, com $-1 < v < 1$, mostre que

$$\mathcal{L}_+^{\uparrow} \ = \ \left\{ B_1(v) \in \mathrm{Mat}\,(\mathbb{R},\ 2) \middle| \ \ B_1(v) \ = \ \begin{pmatrix} \gamma(v) & -v\gamma(v) \\ \\ -v\gamma(v) & \gamma(v) \end{pmatrix},\ -1 < v < 1 \right\},$$

onde $\gamma(v) = (1 - v^2)^{-1/2}$.

g. Fazendo o produto das matrizes, mostre que $B_1(v_1)B_1(v_2) \ = \ B_1\left(\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}\right)$. Essa igualdade rpresenta a regra relativística de composição de velocidades.

---

6) Mostre que os elementos do grupo SL(2, $\mathbb{C}$), o grupo das matrizes complexas 2×2 com determinante igual a 1, são da forma $\exp\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}\right)$, onde $\vec{\alpha} = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3) \in \mathbb{C}^3$ e $\vec{\sigma} = (\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3)$ são as matrizes de Pauli[8].

---

7) $(*)$ As bem-conhecidas transformações de Galilei[9] (excluindo-se as reversões temporais) da

[7] Benjamin Olinde Rodrigues (1794–1851).
[8] Wolfgang Ernst Pauli (1900–1958).
[9] Galileo Galilei (1564–1642).

Mecânica Clássica são fornecidas por matrizes reais 4×4, da forma

$$G\big(r,\ \vec{v}\big) \ := \ \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -v_1 & & & \\ -v_2 & & r & \\ -v_3 & & & \end{array}\right) \ ,$$

onde r é uma matriz 3×3 pertencente a $\mathrm{O}(3)$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ é um vetor com componentes $v_j \in (-\infty,\ \infty)$, $j = 1,\ 2,\ 3$.

Mostre que o conjunto de matrizes $\mathscr{G} \ := \ \Big\{G\big(r,\ \vec{v}\big),\ r \in \mathrm{O}(3) \text{ e } \vec{v} \in \mathbb{R}^3\Big\}$ forma um grupo com o produto usual de matrizes. Mostre que vale a regra de produto

$$G\big(r_1,\ \vec{v}_1\big)G\big(r_2,\ \vec{v}_2\big) \ = \ G\big(r_1 r_2,\ \vec{v}_1 + r_1\vec{v}_2\big) \ . \tag{16}$$

Mostre que o elemento neutro é $G\big(\mathbb{1}_3,\ \vec{0}\big) = \mathbb{1}_4$ e mostre que $G\big(r,\ \vec{v}\big)^{-1} = G\big(r^{-1},\ -r^{-1}\vec{v}\big)$. Esse grupo é denominado *Grupo de Galilei* em $3+1$-dimensões.

As matrizes $G\big(\vec{v}\big) \equiv G\big(\mathbb{1}_3,\ \vec{v}\big)$, ou seja,

$$G\big(\vec{v}\big) \ := \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_1 & 1 & 0 & 0 \\ -v_2 & 0 & 1 & 0 \\ -v_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

com $\vec{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3) \in \mathbb{R}^3$, fornecem os chamados *boosts de Galilei* com velocidade $\vec{v}$. Mostre que vale

$$G\big(\vec{v}_1\big)G\big(\vec{v}_2\big) \ = \ G\big(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\big) \ = \ G\big(\vec{v}_2\big)G\big(\vec{v}_1\big) \ .$$

Mostre, com isso, que $\big\{G\big(\vec{v}\big),\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3\big\}$ é um subgrupo Abeliano do grupo de Galilei, denominado *grupo dos boosts de Galilei*. Ao contrário do que ocorre com os *boosts* de Lorentz, os *boosts* de Galilei formam por si só um grupo e esse grupo é Abeliano (e isomorfo ao grupo $\mathbb{R}^3$). Esses fatos compõem uma marcante diferença entre o grupo de Lorentz e o de Galilei.

Mostre que os geradores dos *boosts* de Galilei são combinações lineares das matrizes

$$\mathcal{M}_1 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathcal{M}_2 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathcal{M}_3 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{17}$$

e que os geradores das rotações no grupo de Galilei são combinações lineares das matrizes

$$\mathcal{J}_1 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \mathcal{J}_2 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \mathcal{J}_3 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{18}$$

Mostre que os geradores, $\mathcal{M}_a$ e $\mathcal{J}_b$, com $a,\ b = 1,\ 2,\ 3$, acima, satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{J}_a,\ \mathcal{J}_b] &= \sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc}\, \mathcal{J}_c\,, \qquad\qquad [\mathcal{M}_a,\ \mathcal{M}_b] = 0\,, \\
[\mathcal{J}_a,\ \mathcal{M}_b] &= \sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc}\, \mathcal{M}_c\,.
\end{aligned}
$$
