Capítulo 8

Momento Angular

Neste capítulo vamos estudar os autovalores e autovetores do momento angular. Este problema também pode ser analisado com o uso do método de operadores, o que faremos na primeira parte deste capítulo. Por outro lado, também é muito instrutivo estudar o problema de autovalores para o momento angular orbital já que isto não só fornece maiores informações sobre a solução obtida pelo método de operadores, mas também prepara o terreno para o estudo de problemas tridimensionais.

8.1 Álgebra do Momento Angular

O momento angular orbital é uma quantidade importante para a análise de problemas clássicos e quânticos que contém potenciais centrais, dado que ele é uma quantidade conservada. O momento angular orbital é definido por

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{x} \wedge \mathbf{p} , \tag{8.1}$$

sendo que esta expressão não apresenta problema de ordenamento em Mecânica Quântica. As componentes do momento angular orbital são dadas por

$$L_x = yp_z - zp_y , \tag{8.2}$$

$$L_y = zp_x - xp_z , \tag{8.3}$$

$$L_z = xp_y - yp_x . \tag{8.4}$$

Daqui podemos obter as seguintes relações de comutação:

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \ , \tag{8.5}$$
$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x \ , \tag{8.6}$$
$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y \ , \tag{8.7}$$

as quais podem ser resumidas usando-se o tensor de Levi-Civita (ϵ^{kjn}),

$$[L_k, L_j] = i\hbar\epsilon^{kjn} L_n \ , \tag{8.8}$$

onde as componentes 1, 2 e 3 representam x, y e z respectivamente.

Também é útil definir o quadrado do momento angular orbital

$$\mathbf{L}^2 \equiv \mathbf{L}\cdot\mathbf{L} = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \ . \tag{8.9}$$

Utilizando as relações (8.5) a (8.7) temos que $\mathbf{L}^2$ comuta com todas as componentes do momento angular orbital, *i.e.*

$$\left[\mathbf{L}^2, L_i\right] = 0 \ . \tag{8.10}$$

Como veremos logo abaixo, é conveniente definir as seguintes combinações dos operadores L_x e L_y

$$L_+ = L_x + iL_y \ , \tag{8.11}$$
$$L_- = L_x - iL_y \ , \tag{8.12}$$

as quais estão ligadas através de $L_+^\dagger = L_-$. Mais ainda, podemos expressar $\mathbf{L}^2$ em termos dos operadores $L_\pm$ utilizando as seguintes relações:

$$L_+L_- = \mathbf{L}^2 - L_z^2 + \hbar L_z \ , \tag{8.13}$$
$$L_-L_+ = \mathbf{L}^2 - L_z^2 - \hbar L_z \ , \tag{8.14}$$

onde o útil termo destas equações origina-se do comutador de L_x com L_y. É também fácil mostrar, usando as relações de comutação (8.5) a (8.7), que

$$\left[\mathbf{L}^2, L_\pm\right] = 0 \ , \tag{8.15}$$
$$[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm \ . \tag{8.16}$$

8.2 Solução Algébrica

Vamos agora determinar os autovalores do momento angular orbital utilizando apenas as relações obtidas na seção anterior, em analogia com a solução do oscilador harmônico apresentada no capítulo 6. Tendo em vista as relações de comutação (8.8) e (8.10), podemos encontrar autovetores simultâneos apenas de $\mathbf{L}^2$ e uma componente de $\mathbf{L}$ a qual escolhemos ser L_z. Em princípio podemos encontrar os autovetores de $\mathbf{L}^2$ (ou L_z) apenas. Ao fazermos isto, em geral, podemos obter autovetores de $\mathbf{L}^2$ que não são autovetores de L_z uma vez que os autovetores escolhidos podem ser uma superposição linear de autoestados de L_z associados a autovalores distintos. Uma vantagem de encontrar-se o conjunto de autovetores comuns a $\mathbf{L}^2$ e L_z é que estes autovetores estão completamente determinados, a menos de fases, uma vez que saibamos a que autovalores eles estão associados.

Resolvamos o seguinte problema de autovalores:[1]

$$\mathbf{L}^2\Phi_{\ell m} = \hbar^2\ell(\ell+1)\,\Phi_{\ell m}\,, \tag{8.17}$$

$$L_z\Phi_{\ell m} = \hbar m\,\Phi_{\ell m}\,, \tag{8.18}$$

onde explicitamos fatores de $\hbar$ para que ℓ e m sejam adimensionais e escrevemos de forma conveniente os autovalores de $\mathbf{L}^2$. Visando simplificar as expressões, admitiremos que as autofunções $\Phi_{\ell m}$ estão propriamente normalizadas, *i.e.* $\langle\Phi_{\ell m}|\Phi_{\ell m}\rangle = 1$.

Para esta análise, utilizaremos os seguintes fatos:

1. Visto que o módulo do vetor $L_-\Phi_{\ell m}$ é positivo ou nulo, temos que

$$\langle L_-\Phi_{\ell m}|L_-\Phi_{\ell m}\rangle = \hbar^2(\ell(\ell+1) - m^2 + m) \geq 0\,, \tag{8.19}$$

   onde utilizamos que $L_+^\dagger = L_-$ e a relação (8.13).

2. Analogamente, considerando o vetor $L_+\Phi_{\ell m}$ temos que

$$\langle L_+\Phi_{\ell m}|L_+\Phi_{\ell m}\rangle = \hbar^2(\ell(\ell+1) - m^2 - m) \geq 0\,. \tag{8.20}$$

[1] Se utilizássemos a notação de Dirac os autovalores de $\mathbf{L}^2$ e L_z seriam denotados por $|\ell m\rangle \equiv \Phi_{\ell m}$.

3. O operador L_+ aplicado a $\Phi_{\ell m}$ é um autoestado de L_z com autovalor $\hbar(m+1)$, ou seja o operador L_+ é análogo ao operador de criação $a^\dagger$ do oscilador harmônico. De fato,

$$L_z(L_+\Phi_{\ell m}) \;=\; (L_+L_z+\hbar L_+)\Phi_{\ell m} \;=\; \hbar(m+1)(L_+\Phi_{\ell m}) \ , \tag{8.21}$$

onde utilizamos a equação (8.16) para obter a primeira igualdade.

4. Analogamente, o operador L_- aplicado a $\Phi_{\ell m}$ é autovetor de L_z com autovalor $\hbar(m-1)$, mostrando que L_- é análogo ao operador de aniquilação a do oscilador harmônico.

$$L_z(L_-\Phi_{\ell m}) \;=\; (L_-L_z-\hbar L_-)\Phi_{\ell m} \;=\; \hbar(m-1)(L_-\Phi_{\ell m}) \ , \tag{8.22}$$

5. Uma vez que $L_\pm$ e $\mathbf{L}^2$ comutam os vetores $L_\pm\Phi_{\ell m}$ são autoestados de $\mathbf{L}^2$ com autovalor $\hbar^2\ell(\ell+1)$, *i.e.*

$$\mathbf{L}^2(L_\pm\Phi_{\ell m}) \;=\; \hbar^2\ell(\ell+1)(L_\pm\Phi_{\ell m}) \ . \tag{8.23}$$

Autovalores

Obtenhamos os possíveis valores de ℓ e m a partir destes fatos. As desigualdades (8.19) e (8.20) permitem-nos concluir que

$$|m| \le \ell \ . \tag{8.24}$$

Visto que a ação de L_+ aumenta de uma unidade o autovalor m, vide (8.21), e que $m \le \ell$, temos que deve existir um $m_{\max}$ tal que

$$L_+\Phi_{\ell m_{\max}} \;=\; 0 \ , \tag{8.25}$$

para que o vínculo (8.24) não seja violado. Dado que o vetor $L_+\Phi_{\ell m_{\max}}$ tem módulo nulo, usando (8.20) para este vetor segue que

$$\ell(\ell+1) - m_{\max}(m_{\max}+1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad m_{\max} = \ell \ . \tag{8.26}$$

Logo, temos que

$$L_+\Phi_{\ell\ell} \;=\; 0 \ . \tag{8.27}$$

Analogamente, o fato de L_- abaixar de uma unidade o autovalor m juntamente com $-\ell \leq m$ de (8.24) conduzem a conclusão de que deve existir um valor mínimo para m ($m_{\rm min}$) tal que $L_-\Phi_{\ell m_{\rm min}} = 0$. Pode-se mostrar utilizando (8.19) que $m_{\rm min} = -\ell$. Logo,

$$L_-\Phi_{\ell -\ell} \;=\; 0 \; . \tag{8.28}$$

Uma vez que ações sucessivas de L_+ devem eventualmente levar ao vetor nulo para que (8.24) não seja violada, sucessivas aplicações L_+ a $\Phi_{\ell-\ell}$ devem produzir a um estado proporcional a $\Phi_{\ell\ell}$. Portanto, 2ℓ deve ser um número inteiro: o de aplicações de L_+ que conduzem de $\Phi_{\ell-\ell}$ a $\Phi_{\ell\ell}$. Com isso, temos que os valores possíveis de ℓ são inteiros e semi-inteiros.

$$\ell \;=\; 0\;,\;\frac{1}{2}\;,\;1\;,\;\frac{3}{2}\;,\;2\;\cdots\;, \tag{8.29}$$

enquanto que m é inteiro ou semi-inteiro conforme ℓ o seja e satisfaz $-\ell \leq m \leq \ell$.

Autovetores

Analogamente à solução por operadores do oscilador harmônico do capítulo 6, podemos determinar os autoestados do momento angular partindo da equação (8.27) ou de (8.28), substituindo a forma explícita do operador L_+ ou L_- respectivamente. Este procedimento conduz a uma equação simples que fornece como resultado $\Phi_{\ell\ell}$ ou $\Phi_{\ell-\ell}$. De posse de um destes vetores, sucessivas aplicações de L_+ ou L_- permitem-nos construir todos os autoestados com $|m| \leq \ell$ dado um valor de ℓ.

Uma vez que assumimos que os autovetores $\Phi_{\ell m}$ estão normalizados e que $L_\pm\Phi_{\ell m}$ é um autoestado de L_z com autovalor $\hbar(m\pm1)$, as relações (8.19) e (8.20) permitem-nos escrever que

$$\Phi_{\ell m\pm1} \;=\; \frac{1}{\hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm1)}} L_\pm\Phi_{\ell m} \; . \tag{8.30}$$

A seguir obteremos os autoestados do momento angular orbital resolvendo explicitamente as equações de autovalores em vez de utilizar o método descrito acima. Todavia, recomendamos fortemente ao leitor que obtenha alguns autoestados do momento angular orbital utilizando o método acima.

8.3 Solução Explícita

A solução explícita do problema de autovalores e autovetores do momento angular orbital é mais direta quando escolhemos coordenadas esféricas (r, θ, φ). Neste sistema de coordenadas o operador momento angular orbital é dado por

$$\mathbf{L} \;=\; \frac{\hbar}{i}\,\mathbf{r}\wedge\nabla\;, \tag{8.31}$$

onde

$$\nabla \;=\; \mathbf{e}_r\,\frac{\partial}{\partial r} \;+\; \mathbf{e}_\varphi\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \;+\; \mathbf{e}_\theta\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\;. \tag{8.32}$$

Os versores do sistema de coordenadas esféricas estão relacionados com os versores cartesianos usuais $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ através de

$$\mathbf{e}_r \;=\; \sin\theta\cos\varphi\;\mathbf{i} \;+\; \sin\theta\sin\varphi\;\mathbf{j} \;+\; \cos\theta\;\mathbf{k}\;, \tag{8.33}$$

$$\mathbf{e}_\theta \;=\; \cos\theta\cos\varphi\;\mathbf{i} \;+\; \cos\theta\sin\varphi\;\mathbf{j} \;-\; \sin\theta\;\mathbf{k}\;, \tag{8.34}$$

$$\mathbf{e}_\varphi \;=\; -\sin\varphi\;\mathbf{i} \;+\; \cos\varphi\;\mathbf{j}\;. \tag{8.35}$$

Portanto, temos que

$$\mathbf{L} \;=\; \frac{\hbar}{i}\left(\mathbf{e}_\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} \;-\; \mathbf{e}_\theta\,\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\;, \tag{8.36}$$

o que nos permite obter as seguintes expressões explícitas:

$$\mathbf{L}^2 \;=\; -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \;+\; \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\;, \tag{8.37}$$

$$L_z \;=\; \frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\;, \tag{8.38}$$

$$L_\pm \;=\; \hbar e^{\pm i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \;\pm\; i\;\mathrm{cotan}\;\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\;. \tag{8.39}$$

Substituindo as expressões acima no problema de autovetores simultâneos de $\mathbf{L}^2$ e L_z (8.17) e (8.18) obtemos as seguintes equações diferenciais acopladas

$$\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \;+\; \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\;Y_{\ell m} \;=\; -\ell(\ell+1)\;Y_{\ell m} \tag{8.40}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_{\ell m} \;=\; imY_{\ell m}\;, \tag{8.41}$$

onde os autoestados $\Phi_{\ell m}$ são dados pelas funções $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$. Para facilitar a análise, usaremos o resultado da seção anterior que $|m| \leq \ell$ variando em passos de uma unidade. Para especificarmos completamente o problema devemos adotar uma condição de contorno. Neste problema é natural impor que o valor de $Y_{\ell m}$ seja o mesmo para $(\theta, \varphi = 0)$ e $(\theta, \varphi = 2\pi)$, uma vez que estas duas escolhas representam o mesmo ponto do espaço.

$$Y_{\ell m}(\theta, 0) \ = \ Y_{\ell m}(\theta, 2\pi) \tag{8.42}$$

A solução de (8.41) pode ser facilmente obtida, sendo dada por

$$Y_{\ell m} = H(\theta)\ e^{im\varphi}\ , \tag{8.43}$$

onde H é um função apenas de θ. Impondo a condição de contorno (8.42) temos que m deve ser um inteiro, ou seja, a condição de contorno não é compatível com valores semi-inteiros para m. Com isso, temos que m e ℓ podem apenas ser inteiros no caso do momento angular orbital. Para maiores informações, veja a próxima seção.

Para determinarmos $H(\theta)$ substituímos (8.43) em (8.40), resultando em

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dH}{d\theta}\right) \ - \ \frac{m^2}{\sin^2\theta}H + \ell(\ell+1)H = 0\ . \tag{8.44}$$

É conveniente neste ponto fazer a substituição de variáveis $\xi = \cos\theta$, que nos permite escrever

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{dH}{d\xi}\right] \ - \ \frac{m^2}{1-\xi^2}H + \ell(\ell+1)H = 0\ . \tag{8.45}$$

Esta é a equação diferencial de Legendre cujas soluções bem comportadas (não divergentes) no intervalo $|\xi| \leq 1$ são as funções associadas de Legendre $P_\ell^m(\xi)$.

$$P_\ell^m(\xi) = \frac{(-1)^m(\ell+m)!}{2^\ell \ell!(\ell-m)!}\ (1-\xi^2)^{-\frac{m}{2}}\frac{d^{\ell-m}}{d\xi^{\ell-m}}(1-\xi^2)^\ell \tag{8.46}$$

Portanto, a solução do problema de autovetores é dada por

$$Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \ = \ C_{\ell m}\ e^{im\varphi}\ P_\ell^m(\cos\theta)\ , \tag{8.47}$$

onde a constante $C_{\ell m}$ deve ser escolhida para que o estado esteja propriamente normalizado. Tendo em vista que os estados que estamos tratando dependem apenas de θ e φ, é natural definir o produto escalar através de

$$\langle\Psi|\Phi\rangle \equiv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \, \sin\theta \; \Psi^*(\theta,\varphi)\Phi(\theta,\varphi) \; , \tag{8.48}$$

onde a integral é feita apenas sobre a parte angular do elemento de volume em coordenadas esféricas. Requerendo que

$$\langle Y_{\ell m}|Y_{\ell' m'}\rangle \; = \; \delta_{\ell\ell'} \, \delta_{mm'} \tag{8.49}$$

as constantes $C_{\ell m}$ ficam determinadas a mesmos de uma fase, sendo que na convenção que adotamos os harmônicos esféricos $Y_{\ell m}$ são dados por

$$Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \; = \; (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \, \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \; e^{im\varphi} \; P_\ell^m(\cos\theta) \; . \tag{8.50}$$

Os harmônicos esféricos com ℓ mais baixos são

$$Y_{00} \; = \; \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \; , \tag{8.51}$$

$$Y_{10} \; = \; \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \; \cos\theta \; , \tag{8.52}$$

$$Y_{1\pm 1} \; = \; \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \; e^{\pm i\varphi} \; \sin\theta \; , \tag{8.53}$$

$$Y_{20} \; = \; \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \; \left(3\cos^2\theta - 1\right) \; , \tag{8.54}$$

$$Y_{2\pm 1} \; = \; \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \; e^{\pm i\varphi} \; \cos\theta \; \sin\theta \; , \tag{8.55}$$

$$Y_{2\pm 2} \; = \; \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \; e^{\pm 2i\varphi} \sin^2\theta \; . \tag{8.56}$$

8.4 Discussão

A solução formal do problema de autovetores de $\mathbf{L}^2$ e L_z, obtida pelo método de operadores, permite que ℓ e m assumam valores semi-inteiros.

Por outro lado, a solução explícita através da resolução de equações diferenciais conduz apenas a valores inteiros de ℓ e m. Há alguma contradição nestes dois fatos? A resposta é simplesmente **não**. A solução explícita levou apenas a valores inteiros de m devido a condição de contorno (8.42) que aplicamos. No caso da solução pelo método de operadores, a qual é compatível com valores inteiros e semi-inteiros, usamos apenas as propriedades do operador momento angular orbital. Caso tivéssemos calculado as autofunções $\Phi_{\ell\ell}$ que são soluções de (8.27) veríamos que estas satisfazem as condições de contorno apenas se ℓ for inteiro. Logo, não existe conflito entre os dois métodos.

Apesar dos valores semi-inteiros de ℓ não ocorrerem para o momento angular orbital, aprendemos da solução formal que operadores que satisfazem as relações de comutação (8.5) a (8.7) podem, em princípio, exibir valores de ℓ semi-inteiro. Obviamente, isto vai depender da forma explícita do operador, assim como ocorreu no caso do momento angular orbital. Veremos mais adiante que as partículas podem apresentar um momento angular intrínseco (spin) associado a valores semi-inteiros de ℓ. Visto que esta nova contribuição para o momento angular total não tem análogo clássico, utilizaremos as relações de comutação (8.5) a (8.7) como guia na definição dos operadores hermitianos associados a este novo grau de liberdade.