Mecânica Quântica II

Lista 9

1. Considere duas partículas num sistema de dois níveis $\{|\phi_a\rangle, |\phi_b\rangle\}$, e.g. duas partículas de spin 1/2, tal que $\langle\phi_i|\phi_j\rangle = \delta_{ij}$. Mostre que o estado mais geral das duas partículas dado por
$$\alpha|\phi_a(1)\rangle\,|\phi_b(2)\rangle + \beta|\phi_b(1)\rangle\,|\phi_a(2)\rangle\ ,$$
onde α e β são coefficientes complexos, *não pode ser escrito como um estado produto* da forma
$$|\psi_r(1)\rangle\,|\psi_s(2)\rangle\ ,$$
onde $|\psi_r(1)\rangle$ e $|\psi_s(2)\rangle$ são quaisquer estados expandidos na base ortonormal dada. (**Nota**: Isto mostra que o estado $s = 0$ singleto no experimento de EPR é de fato emaranhado e que não temos como escrevê-lo como o produto de um estado no spin up e outro no spin down).

2. Considere duas partículas de spin 1/2 produto do decaimento em repouso de uma partícula de $s = 0$ (A situação do "paradoxo" EPR).

   (a) Usando que
   $$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k\ ,$$
   mostre que
   $$(\mathbf{s_1}\cdot\hat{a})(\mathbf{s_1}\cdot\hat{b}) = \frac{\hbar^2}{4}\hat{a}\cdot\hat{b} + i\frac{\hbar}{2}(\hat{a}\times\hat{b})\cdot\mathbf{s_1}\ .$$
   onde $\mathbf{s_1}$ é um dos spins (e.g. da partícula 1), e $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são duas direções espaciais arbitrárias.

   (b) Mostre que para a situação descrita acima, a média do produto das projeções dos spins é
   $$\langle(\mathbf{s_1}\cdot\hat{a})(\mathbf{s_2}\cdot\hat{b})\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\ .$$
   Essa é a previsão da função de correlação dos dois spins na mecânica quântica.

3. Na situação do problema anterior, considere que as projeções dos spins das partículas 1 e 2 são funções bem definidas dadas por $(\hbar/2)S(\hat{a},\lambda)$ e $(\hbar/2)R(\hat{b},\lambda)$ respetivamente, onde λ é um parâmetro ou conjunto de parâmetros associados a variáveis locais ocultas, e as funções S e R só podem tomar os valores ±1. Se os valores de λ estão estatisticamente distribuidos com uma densidade de probabilidade $\rho(\lambda)$,

   (a) Mostre que a função de correlação entre os spins pode ser escrita como
   $$\langle(\mathbf{s_1}\cdot\hat{a})(\mathbf{s_2}\cdot\hat{b})\rangle = -\frac{\hbar}{4}\int d\lambda\,\rho(\lambda)\,S(\hat{a},\lambda)\,S(\hat{b},\lambda)$$

(b) Prove a desigualdade de Bell

$$|\langle(\mathbf{s_1}\cdot\hat{a})(\mathbf{s_2}\cdot\hat{b})\rangle - \langle(\mathbf{s_1}\cdot\hat{a})(\mathbf{s_2}\cdot\hat{c})\rangle| \leq \frac{\hbar^2}{4} + \langle(\mathbf{s_1}\cdot\hat{b})(\mathbf{s_2}\cdot\hat{c})\rangle$$

onde $\hat{c}$ é uma terceira direção arbitrária no espaço.

4. **Generalização da Desigualdade de Bell**: Considere um sistema de duas partículas. com duas grandezas associadas a elas $S_1(\hat{a})$ e $S_2(\hat{b})$ que podem tomar os valores ± 1, onde $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são duas direções espaciais.

   (a) Mostre que numa teoria com variáveis ocultas locais λ com distribuição ditada pela densidade de probabilidade $\rho(\lambda)$, a função de correlação dessas grandezas associadas às partículas 1 e 2 é dada por

   $$\langle S_1(\hat{a})S_2(\hat{b})\rangle = \int d\lambda \rho(\lambda) S_1(\hat{a},\lambda) S_2(\hat{b},\lambda) \ ,$$

   onde as funções $S_1(\hat{,}\lambda)$ e $S_2(\hat{b},\lambda)$ estão bem definidas em termos das variáveis locais λ e também poder tomar os valores ± 1.

   (b) Considere agora quatro direções arbitrárias no espaço: $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{a}'$ e $\hat{b}'$. Mostre que nas teorias com variáveis ocultas locais a seguinte desigualdade deve ser respeitada

   $$|\langle S_1(\hat{a})S_2(\hat{b})\rangle - \langle S_1(\hat{a})S_2(\hat{b}')\rangle + \langle S_1(\hat{a}')S_2(\hat{b})\rangle + \langle S_1(\hat{a}')S_2(\hat{b}')\rangle| \leq 2$$

5. Construa a matriz densidade para uma partícula num estado de $S_y = +\hbar/2$. Calcule o seu trazo e ρ^2. Para este último explique o que você esperaria como resultado.

6. Considere a matriz densidade de um sistema misturado

   $$\rho = \sum_k p_K |\Psi_K\rangle\langle\Psi_K|$$

   onde os $|\Psi_K\rangle$ são estados puros (não necessariamente ortogonais) e p_K é a probabilidade do sistema de estar no estado puro $|\Psi_K\rangle$. Mostre que

   (a) Em geral $\rho^2 \neq \rho$. Quando é igual ?

   (b) $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.

   (c) Se A é um observável, $\langle A\rangle = \mathrm{Tr}(\rho \mathrm{A})$.

   (d) Mostre que a evolução de ρ é definita por

   $$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = [H,\rho] \ .$$

7. Construa a matriz densidade para os seguintes sistemas de partículas de spin 1/2, e verifique se satisfazem $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$ e $\rho^2 = \rho$:

(a) Sistema com 50% das partículas no estado $S_z = +\hbar/2$ e 50% no $S_x = +\hbar/2$.

(b) Sistema com 50% das partículas no estado $S_z = +\hbar/2$, 25% no $S_x = +\hbar/2$ e 25% no estado $S_x = -\hbar/2$.

8. Mostre que a evolução temporal da matriz ρ no tempo t para a matriz ρ' no tempo t' resulta em
$$\rho' = e^{-iH(t'-t)/\hbar}\,\rho\,e^{iH(t'-t)/\hbar}$$

9. Considere um sistema composto de dois setores, I e II isolados um do outro. Os estados do sistema são $\{|\psi_{ma}\rangle\}$, onde m e a são os indices dos estados dos sistemas I e II respetivamente, $\{|\psi_m\rangle\}$ e $\{|\psi_a\rangle\}$. A matriz de um operador A é representada como
$$A_{ma,nb} = \langle\psi_{ma}|A|\psi_{nb}\rangle\ .$$

(a) Mostre que se um operador A só atua no setor I, i.e. se ele pode ser escrito como
$$A_{ma,nb} = A^I_{mn}\,\delta_{ab}\ ,$$
então
$$\langle A\rangle = \sum_{mn} A^I_{mn}\rho^I_{nm}\ ,$$
onde
$$\rho^I_{nm} = \sum_a \rho_{na,ma}\ .$$

(b) Em geral, a transformações possíveis da matriz densidade por evolução temporal ou por processos de medição é linear, e portanto pode ser escrita como
$$\rho'_{m'a',n'b'} = \sum_{mnab} K_{m'a'ma,n'b'nb}\,\rho_{ma,nb}$$
onde K é o kernel da transformação. Se agora consideramos a evolução temporal dos subsistemas I e II, o hamiltoniano em forma matricial pode ser escrito como
$$H_{ma,nb} = H^I_{mn}\delta_{ab} + H^{II}_{ab}\delta_{mn}\ .$$
Mostre que nesse caso se satisfaz que
$$K_{m'a'ma,n'b'nb} = K^I_{m'm,n'n}\,K^{II}_{a'a,b'b}\ ,$$
I.e. o kernel K fatoriza nos setores I e II.

(c) Mostre que quando o kernel K de uma transformação linear da matriz densidade (devida à evolução temporal ou a medições) fatoriza como no caso acima, a matriz densidade do setor I, ρ^I_{mn} se tranforma independentemente do setor II, i.e.
$$\rho^{I'}_{m'n'} = \sum_{mn} K^I_{m'm,n'n}\,\rho^I_{mn}$$