Mecânica Quântica II

Lista 8

1. Considere o espalhamento a baixas energias por um potencial definido por uma camada esférica de raio a por

$$V(r) = \alpha\,\delta(r-a)\ .$$

   Use a expansão em ondas parciais para o caso $ka \ll 1$, mantendo só o termo $\ell = 0$ na expansão.

   (a) Divida o espaço numa região externa ($r > a$) e outra interna ($r < a$). A forma da solução deve ser regular nas duas regiões.

   (b) Imponha condições de contorno em $r = a$ para a função de onda e sua derivada. Notar que a derivada é *descontínua* em $r = a$. Integrando a equação de Schrödinger radial mostre que a descontinuidade é

$$\Delta\psi' = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(a)$$

   (c) Mostre que

$$f(\theta) \simeq a_0 = -\frac{\alpha\beta}{1+\beta}$$

   onde $\beta \equiv 2m\alpha a/\hbar^2$

   (d) Calcule a seção de choque total.

2. Considere um potencial esférico infinito (esfera impenetrável) dado por

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

   tal como foi dado em aula.

   (a) Obtenha as ondas parciais a_ℓ impondo as condições de contorno apropriadas. Mostre que as variações de fase δ_ℓ são dadas por

$$\delta_\ell = \arctan\left[\frac{j_\ell(ka)}{n_\ell(ka)}\right]\ .$$

   (b) Obtenha a seção de choque total na aproximação $ka \ll 1$ correspondente a baixas energias. Mostre que o termo que mais contribue resulta em

$$\sigma \simeq 4\pi a^2$$

3. **Ressonância**: Considere um problema de espalhamento cuja variação de fase de ondas parciais é dada por

$$\delta_\ell = \delta_b + \frac{\Gamma/2}{E_0 - E} \ ,$$

onde $\sin(\delta_b) \simeq 0$, E é a energia da partícula, e E_0 e Γ são constantes.

(a) Faça um gráfico de δ_ℓ em função da energia E. Que acontece quando a energia atravessa E_0 ?

(b) Mostre que para $E \simeq E_0$ a seção de choque pode ser escrita como

$$\sigma = \sum_\ell \sigma^\ell \ ,$$

onde

$$\sigma_\ell \simeq \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\frac{(\Gamma/2)^2}{(E_0-E)^2+(\Gamma/2)^2} \ .$$

(c) Faça um gráfico de σ_ℓ vs. E. Mostre que Γ e a distância entre os dois pontos da curva onde $\sigma^\ell = \sigma^\ell_{\mathrm{MAX}}/2$. Essa é a largura da ressonância.

(d) Defina a grandeza

$$S_\ell \equiv e^{i2\delta_\ell}$$

e mostre que no caso geral ela é a razão entre as amplitudes das ondas espalhada e incidente. Mostre que para a variação de fase descrita no ponto (a) acima temos que

$$S_\ell = \frac{E - E_0 - i\Gamma/2}{E - E_0 + i\Gamma/2} \ .$$

(e) Mostre que se continuamos a energia analiticamente no plano complexo, S_ℓ tem um polo em

$$E = E_0 - i\Gamma/2 \ ,$$

e portanto a *norma* do estado descrito por δ_ℓ decai no tempo com um fator

$$e^{-t/\tau} \ ,$$

onde τ é o tempo típico de decaimento dado por

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} \ .$$

Comentário: Ressonâncias são estados ligados instáveis, com tempo de decaimento determinado pela largura.

4. Partindo da equação de Schrödinger para uma partícula de massa m num potencial $V(\mathbf{r})$,

   (a) Mostre que a solução mais geral dela deve satisfazer

   $$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r_0})\, V(\mathbf{r_0})\, \psi(\mathbf{r_0})\, d^3 r_0 \ ,$$

   onde $\psi_0(\mathbf{r})$ é a solução para a partícula livre e $G(\mathbf{r})$ é a função de Green satisfazendo

   $$(\nabla^2 + k^2)\, G(\mathbf{r}) = \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \ .$$

   onde $k^2 = 2mE/\hbar^2$ e E é a energia da partícula.

   (b) Mostre que a função de Green pode ser escrita em forma integral como

   $$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{k^2 - q^2}\, d^3 q \ .$$

   (c) Faça a integral tridimensional acima para obter $G(\mathbf{r})$. Note que $d^3q = q^2 dq sin\theta_q d\theta_q d\phi_q$ e que a integral em q pode ser feita continuando q no plano complexo e usando o teorema dos resíduos. Finalmente, mostre que

   $$G(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi} e^{ikr} \ .$$

5. Mostre que na aproximação de Born, a aplitude de espalhamento pode ser escrita como

   $$f(\theta, \phi) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}\, V(\mathbf{r})\, d^3 r$$

   onde $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ e o vetor número de onda associado à partícula espalhada, e $\mathbf{k}'$ à partícula incidente.

6. Considere o potencial

   $$V(r) = \begin{cases} V_0, & r \leq q \\ 0, & r > a \end{cases}$$

   Usando a aproximação de Born, calcule a amplitude $f(\theta, \phi)$ e a seção de choque total no limite de baixas energias, i.e. para

   $$ka \ll 1 \ .$$

7. Considere o potencial

   $$V(r) = \alpha\delta(r - a)$$

   Calcule a amplitude $f(\theta, \phi)$ na aproximação de Born. Calcule a seção de choque total no limite de baixas energias.

8. Considere o potencial gaussiano dado por

$$V(r) = V_0 e^{-\mu r^2/a} \ ,$$

onde V_0, μ e a são constantes dadas. Usando a aproximação de Born, calcule a seção de choque total.

9. **Série de Born**: Partindo da expressão integral da equação de Schrödinger no problema 4. (a), escreva a função de onda até o *segundo termo* na iteração da solução, que começa com substituir $\psi(\mathbf{r_0})$ na integral pela função de onda da partícula livre. Pense no desenho de uma forma diagramática para expressar a série.