Mecânica Quântica II

Lista 6

1. Considere o hamiltoniano
$$H = H^0 + V(t)$$
onde $V(t)$ pode ser considerada uma perturbação dependente do tempo do H^0. Se a função de onde do sistema é escrita como
$$\psi(t)\rangle = \sum_n b_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} |\psi_n\rangle \ ,$$
onde $\{|\psi_n\rangle\}$ é uma base de autoestados de H^0 com autovalores $\{E_n\}$,
   (a) Derive a equação diferencial satisfeita pelos coeficientes $b_n(t)$.
   (b) Expandindo os coeficientes como
   $$b_n(t) = b_n^{(0)}(t) + \lambda b_n^{(1)}(t) + \lambda^2 b_n^{(2)} + \cdots$$
   ache uma expressão para $b_n^{(1)}(t)$.
   (c) Obtenha uma expressão para o coefciente da segunda ordem em teoria de perturbações, $b_n^{(2)}$.

2. Considere um sistema de dois estados discretos $|1\rangle$ e $|2\rangle$ com energias $E_1 < E_2$. Se agora ligamos uma perturbação sinusoidal de frequência ω e amplitude V
   (a) Calcule a probabilidade de transição entre os autoestados não perturbados como função do tempo.
   (b) Obtenha a probabilidade de transição no limite no qual a perturbação não depende do tempo.

3. Considere um estado inicial ligado (i.e. espetro discreto) de energia E_i e a transição a um contínuo de energias. Na derivação da regra de ouro de Fermi em aula, assumimos que a perturbação era constante no tempo, i.e. $V(t) = V$ onde V é um operador. Mostre que se a perturbação é sinusoidal com frequência ω e amplitude V, a regra de ouro de Fermi para a probabilidade de transição por unidade de tempo para a transição $|\psi_i\rangle \to |\psi_f\rangle$ é
$$w(\psi_i, \psi_f) = \frac{\pi}{2\hbar} \left|\langle \beta_f, E_f = E_i + \hbar\omega | V | \psi_i\rangle\right|^2 \ \rho(\beta_f, E_f = E_i + \hbar\omega) \ .$$

4. Uma partícula com momento inicial $\mathbf{p_i}$ (i.e. $|\psi(0)\rangle = |\mathbf{p_i}\rangle$) é espalhada por um potencial V cujos elementos de matriz na representação espacial são dados por
$$\langle \mathbf{r}|V|\mathbf{r}'\rangle = V(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

(a) Calcule a probabilidade de espalhamento por unidade de tempo e de ângulo sólido Ω, $w(\mathbf{p_i}, \mathbf{p_f})$ usando a regra de ouro de Fermi. Use o fato que os auto estados do momento satisfazem

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}/\hbar}$$

e a expressão da densidade de estados obtida em aula.

(b) Calcule a seção de choque diferencial do espalhamento

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

onde definimos a seção de choque diferencial $d\sigma$ como a probabilidade de espalhamento por unidade de tempo, de ângulo sólido e do fluxo de partículas incidentes:

$$d\sigma = \frac{w(\mathbf{p_i}, \mathbf{p_f})}{J_i}$$

onde o fluxo incidente é a corrente de probabilidade da partícula inicial de momento $\mathbf{p_i}$

$$J_i = |\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle|^2 v_i \ ,$$

e v_i e a velocidade da partícula inicial.

5. Mostre que dado o potencial de interação tipo dipolo elétrico da forma

$$V_{de}(t) = \frac{qE_0}{m\omega} P_z \sin \omega t$$

é sempre possível substituir o elemento de matriz do operador P_z, i.e. $\langle \psi_f | P_z | \psi_i \rangle$, pelo correspondente elemento de matriz do operador Z. **Dica**: Use que

$$[Z, H^0] = i\hbar \frac{\partial H^0}{\partial P_z}$$