Mecânica Quântica II

Lista 3

1. Considere a primeira correção relativista às energias do átomo de hidrogênio.

   (a) Partindo da relação de dispersão relativista $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, onde c é a velocidade da luz e p o módulo do vetor momento, obtenha o hamiltoniano da perturbação que resulta na correção em questão.

   (b) Use o hamiltoniano achado acima para obter uma expressão para a correção relativista às energias, em função das energias não perturbadas e dos valores esperados
   $$\langle \frac{1}{r} \rangle \ , \qquad \langle \frac{1}{r^2} \rangle \ .$$

   (c) Use o teorema de Feynman-Hellmann para calcular os valores esperados acima e obtenha uma expressão para a correção relativista às energias do átomo de hidrogênio.

2. A interação entre o momento magnético do elétron no átomo de hidrogênio e o campo magnético gerado pelo próton resulta em
   $$H_{so} = \frac{e^2}{2m^2c^2r^3}\mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \ ,$$
   onde $\mathbf{S}$ e $\mathbf{L}$ são os operadores de spin e momento angular orbital respetivamente.

   (a) Mostre que H_{so} comuta com L^2, S^2, J^2 e $\mathbf{J}$, onde $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$.

   (b) Porque $\mathbf{J}$ deve comutar com H_{so} ? Use argumentos de simetria.

3. Usando que na base $|n\ell s j m_j\rangle$ o valor esperado
   $$\langle \frac{1}{r^3} \rangle = \frac{1}{\ell(\ell+1/2)(\ell+1)n^3a^3} \ ,$$
   onde a é o raio de Bohr, calcule a contribuição para as correções da energia vindo da interação spin-órbita H_{so}.

4. Finalmente, obtenha uma expressão para os níveis de energia do átomo de hidrogênio incluindo as correções em primeira ordem em teoria de perturbações vindo da relatividade e de H_{so}.

5. Considere um operador vetorial $\mathbf{V}$. Partindo das regras de comutação com o momento angular total $\mathbf{J}$
$$[J_i, V_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}V_k \ ,$$
   (a) Calcule os seguintes comutadores: $[J_\pm, V_+]$, $[J_\pm, V_-]$.
   (b) Mostre que
   $$\langle njm|V_Z|n'j'm'\rangle = 0 \ ,$$
   se $m \neq m'$.
   (c) Mostre que
   $$\langle njm|V_\pm|n'j'm'\rangle = 0 \ ,$$
   se $m \neq m' \pm 1$.
   (d) Mostre que os elementos de matriz $\langle njm|V_\pm|njm'\rangle$ são proporcionais aos elementos de matriz correspondentes das componentes do momento angular $J_\pm$.

6. Usando o teorema da projeção (resultado do teorema de Wigner-Eckart) que estabelece que no subespaço $\mathcal{E}(n, \ell, j)$ um operador vetorial $\mathbf{V}$ satisfaz
$$\mathbf{V} = \frac{\langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{J}\rangle_{n,\ell,j}}{j(j+1)\hbar^2}\,\mathbf{J} \ ,$$
onde $\mathbf{J}$ é o momento angular total, mostre que o hamiltoniano da ação de um campo magnético fraco e constante $\mathbf{B} = B\hat{z}$ pode ser escrito como
$$H_Z = \frac{e}{2mc}B\,g_J\,J_z \ ,$$
onde J_Z é a componente z do momento angular total e g_J é o fator do Landé. Calcule g_J.

7. Use o teorema da projeção para mostrar que dois operadores vetoriais $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$, atuando no mesmo subespaço $\mathcal{E}(n, \ell, j)$ são proporcionais, i.e.
$$\mathbf{V} \propto \mathbf{W} \ .$$
Calcule a constante de proporcionalidade.

8. **Efeito Zeeman Intermediário**:
Considere o efeito Zeeman no regime no qual o campo magnético externo $\mathbf{B}$ é da ordem do campo intrínseco do núcleo responsável pela interação spin-órbita. Portanto, o hamiltoniano de Bohr, H^0 (termo cinético mais Coulomb) é perturbado pelo operador
$$V = H_{ef} + H_Z \ ,$$
onde H_{ef} é o hamiltoniano da estrutura fina e H_Z o correspondente ao efeito Zeeman.

(a) Explique quais as possíveis bases de autoestados de H^0 que podemos utilizar para descrever a perturbação V ? Explicite quais operadores tem cada uma dessas bases como autoestados.

(b) Considere o caso $n = 2$ e escolha uma dessas bases de autoestados de H^0. Descreva os estados dessa base de autoestados de um dos termos de V como combinação linear dos autoestados do *outro* termo da perturbação.

(c) Construa a matriz que descreve V numa das bases.

(d) Obtenha, usando teoria de perturbações degenerada, as primeiras correções às autoenergias de H^0 decorrentes da perturbação V.

9. **Efeito Stark**:
Considere um átomo de hidrogênio num campo *elétrico* uniforme na direção $\hat{z}$, i.e. $\mathbf{E} = E\hat{z}$. O hamiltoniano é

$$H_S = e\,E\,z = e\,E\,r\cos\theta \ .$$

Considerando H_S como uma perturbação do hamiltoniano de Bohr H^0 (termo cinético mais potencial de Coulomb) :

(a) Mostre que em primeira ordem em teoria de perturbações, o estado fundamental $\psi_{100}(r, \theta, \phi)$ não é afetado.

(b) Considere os efeitos de H_S no primeiro estado excitado, $n = 2$. Ele corresponde às funções de onda ψ_{200}, ψ_{211}, ψ_{210} and ψ_{21-1} e portanto é quatro vezes degenerado. Calcule a correção em primeira ordem para E_2 devida à H_S.