Mecânica Quântica II

Lista 2

1. Considere um sitema com dupla degenerescência. Assumindo que os estados não perturbados que diagonalizam a perturbação V são dados por

$$|\psi^0_\pm\rangle = \alpha_\pm|\psi^0_a\rangle + \beta_\pm|\psi^0_b\rangle \ ,$$

e usando que $\alpha_\pm$ e $\beta_\pm$ satisfazem

$$\begin{pmatrix} V_{aa} & V_{ab} \\ V_{ba} & V_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_\pm \\ \beta_\pm \end{pmatrix} = E^1_\pm \begin{pmatrix} \alpha_\pm \\ \beta_\pm \end{pmatrix}$$

mostre explicitamente que

(a) Os “bons”estados são ortogonais, i.e. $\langle\psi^0_+|\psi^0_-\rangle = 0$;

(b) $\langle\psi^0_+|V|\psi^0_-\rangle = 0$;

(c) $\langle\psi^0_\pm|V|\psi^0_\pm\rangle = E^1_\pm$, onde $E^1_\pm$ são os autovalores da equação acima.

2. Considere uma partícula de massa m confinada numa dimensão compacta de comprimento L (i.e. um círculo de raio R tal que $L = 2\pi R$).

(a) Mostre que os autoestados normalizados do hamiltoniano livre são

$$\psi^\pm_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\pm i(2\pi n x)/L}$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots$; e que as autonergias (duplamente degeneradas) são

$$E_n = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2}\, n^2 \ .$$

(b) Se agora introduzimos uma perturbação da forma

$$V(x) = -V_0 e^{-x^2/a^2}$$

onde V_0 é uma constante com unidades de energia e $a \ll L$, obtenha as correções às energias não perturbadas em primeira ordem em teoria de perturbações, $E^1_{n\pm}$, resolvendo o problema de autovalores que diagonaliza a perturbação V (e.g. $a = +$, $b = -$). (**Dica**: para simplificar as integrais use o fato que $a \ll L$ para tomar $-L/2 \to -\infty$ e $L/2 \to \infty$).

(c) Ache as combinações lineares de $\psi^+_n(x)$ e $\psi^-_n(x)$ que podem ser usadas em teoria de perturbações dada a degenerescência das E_n. Mostre que esses estados “bons” podem ser usados para achar as correções $E^1_{n\pm}$ do ponto anterior usando a fórmula do caso *não degenerado*.

(d) Mostre que o operador paridade definido por

$$Pf(x) = f(-x) \ ,$$

é hermitiano, comuta com o hamiltoniano não perturbado H^0, e use ele para obter os estados não perturbados "bons" obtidos no ponto anterior.

3. O hamiltoniano de um sistema de dimensão 3 é dado por

$$H = V_0 \begin{pmatrix} (1-\epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix} \ ,$$

onde V_0 é uma constante e $\epsilon \ll 1$ é um parâmetro adimensional pequeno.

(a) Obtenha os autovalores e autoestados do hamiltoniano não perturbado H^0 (i.e. $\epsilon = 0$).

(b) Resolva o problema para $\epsilon \neq 0$ *exatamente* e expanda os resultados até segunda ordem em ϵ.

(c) Um dos autoestados de H^0 é não-degenerado. Usando teoria de perturbações até segunda ordem obtenha as correções a seu autovalor. Compare o resultado com o do item anterior.

(d) Os outros dois autoestados de H^0 definem um sub-espaço de degenerescência de dimensão 2. Use a teoria de perturbações *degenerada* para obter as correções até *segunda ordem* para as energias. Compare com os resultados exatos.

4. **Degenerescência de dimensão n:**
Considere um sistema com uma degenerescência de ordem n. Os autoestados do hamiltoniano não perturbado H^0 no subespaço degenerado são $|\psi_j^0\rangle$, com $j = 1, \ldots, n$, todos com autovalor E^0. Dada uma perturbação V, mostre que a combinação linear de estados degenerados

$$|\psi^0\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, |\psi_j^0\rangle \ ,$$

define os autoestados bons a serem utilizados em teoria de perturbações sempre que

$$\sum_{k=1}^{n} V_{jk} \alpha_k = E^1 \, \alpha_j \ ,$$

onde os E^1's são as correções a E^0 em primeira ordem em teoria de perturbações, e

$$V_{jk} = \langle \psi_j^0 | V | \psi_k^0 \rangle \ .$$