Entropia de Emaranhamento

Dado que o operador densidade ρ é hermitiano ($\rho^\dagger = \rho$), ele pode ser escrito em termos de seus autovalores positivos e seus autovetores. Se tínhamos

$$\rho = \sum_k p_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|$$

em termos dos seus próprios autovetores a matriz densidade é diagonal, com autovalores q_i

$$\rho_{ij} = q_i \delta_{ij}$$

e os q_i's satisfazem $q_i \geq 0 \quad \forall\, 0$.
O operador ρ então pode ser reescrito como

$$\rho = \sum_i q_i |\Phi_i\rangle\langle\Phi_i|$$

onde $\{|\Phi_i\rangle\}$ é a base de autoestados de ρ.
Uma forma de medir o grau de pureza de um estado é a entropia de Von Neumann. Ela é definida por

$$\left\{ S[\rho] \equiv -k_B \, \mathrm{Tr}(\rho \ln \rho) \right\}$$

onde k_B é a constante de Boltzmann.
Mas em termos dos autovalores de ρ, q_i, podemos escrever

$$\boxed{S[\rho] = -k_B \sum_i \rho_i \ln \rho_i}$$

Para provar a expressão acima basta ver que

$$\rho_{ij} = \sum_k \rho_k \underbrace{\langle \Phi_i | \Phi_k \rangle}_{\delta_{ik}} \underbrace{\langle \Phi_k | \Phi_j \rangle}_{\delta_{kj}}$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{ii} = \rho_i \quad (\rho \text{ é diagonal nesta base!})$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Tr}(\rho \ln \rho) = \sum_i \rho_{ii} \ln \rho_{ii}$$

$$= \sum_i \rho_i \ln \rho_i \quad \text{QED.}$$

Um estado puro tem um $\rho_i = 0$ e todos os outros $= 0$. $\Rightarrow$

$$\left\{ S_{puro}[\rho] = 0 \right\}$$

entanto que para estados misturados temos

$$\left\{ S[\rho] > 0 \right\}$$

Se agora voltarmos a considerar um sistema composto de dois setores I e II, no caso em que NÃO existe emaranhamento entre eles é o caso no qual a matriz densidade fatoriza:

$$\rho_{ma,nb} = \rho^{I}_{mn} \, \rho^{II}_{ab}$$

Neste caso, cada autovalor de ρ, ϱ_i, é o produto de um autovalor de ρ^I, ϱ^I_i, vezes um autovalor de ρ^{II}, ϱ^{II}_r

$$\varrho_{ir} = \varrho^{I}_{i} \, \varrho^{II}_{r}$$

Então a entropia de Von Neumann é

$$S[\rho] = -k_B \sum_{ir} \varrho^{I}_{i} \varrho^{II}_{r} \ln\left(\varrho^{I}_{i} \varrho^{II}_{r}\right)$$

$$= -k_B \sum_{ir} \varrho^{I}_{i} \varrho^{II}_{r} \left(\ln \varrho^{I}_{i} + \ln \varrho^{II}_{r}\right)$$

$$= -k_B \sum_{ir} \varrho^{I}_{i} \varrho^{II}_{r} \ln \varrho^{I}_{i}$$

$$- k_B \sum_{ir} \varrho^{I}_{i} \varrho^{II}_{r} \ln \varrho^{II}_{r}$$

Mas se na primeira soma usamos $\sum_r \varrho^{II}_r = 1$ e na segunda que $\sum_i \varrho^{I}_i = 1$

obtemos que no caso sem emaranhamento

$$\left\{ S[\rho] = S[\rho^{I}] + S[\rho^{II}] \right\}$$

$\Rightarrow$ em ausência de emaranhamento a entropia de Von Neumann é aditiva (ou extensiva).

Num estado puro $|\Psi\rangle$ a densidade ρ é

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

e sua matriz é

$$\rho_{ma,nb} = \langle \Psi_{ma} | \Psi \rangle \langle \Psi | \Psi_{nb} \rangle$$

$$\equiv \Psi_{ma} \Psi^{*}_{nb}$$

Mas então

$$\rho^{I}_{mn} = \sum_{a} \rho_{ma,na}$$

$$\left\{ \rho^{I}_{mn} = \sum_{a} \Psi_{ma} \Psi^{*}_{na} = (\Psi\Psi^{\dagger})_{mn} \right\}$$

Por outra parte,

$$\rho^{II}_{ab} = \sum_{m} \rho_{ma,mb} = \sum_{m} \Psi_{ma} \Psi^{*}_{mb}$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \rho^{II}_{ab} = (\Psi^{\dagger}\Psi)_{ba} \right\}$$

Mas é possível ver (provar) que ρ^{I} e ρ^{II} tem os mesmos autovalores. Portanto,

$$S_I = -k_B \, Tr\left(\rho^{I} \ln \rho^{I}\right) = -k_B \sum_i q_i \ln q_i$$

$$= -k_B \, Tr\left(\rho^{II} \ln \rho^{II}\right) = S_{II}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_I = S_{II}}$$

Os dois subsistemas isolados tem a mesma entropia de Von Neumann.
Essa entropia comum aos sistemas emaranhados é a chamada entropia de emaranhamento.

Ela é $\neq 0$ só se os subsistemas estão de fato emaranhados. Se esse não é o caso, então os sistemas I e II são eles estados puros e o estado $|\Psi\rangle$ é um estado produto

$$|\Psi\rangle = |\Psi_I\rangle |\Psi_{II}\rangle$$

Nesse caso $\rho^{I} = \mathrm{diag}(1, 0, 0, \ldots) = \rho^{II}$

e $S_I = S_{II} = 0$.

Lei da Área

Um resultado fundamental da física de buracos negros, é que a entropia não é extensiva, e sua expressão é

$$S_{BH} = \frac{1}{4 l_P^2} A$$

Bekenstein Hawking (1973)

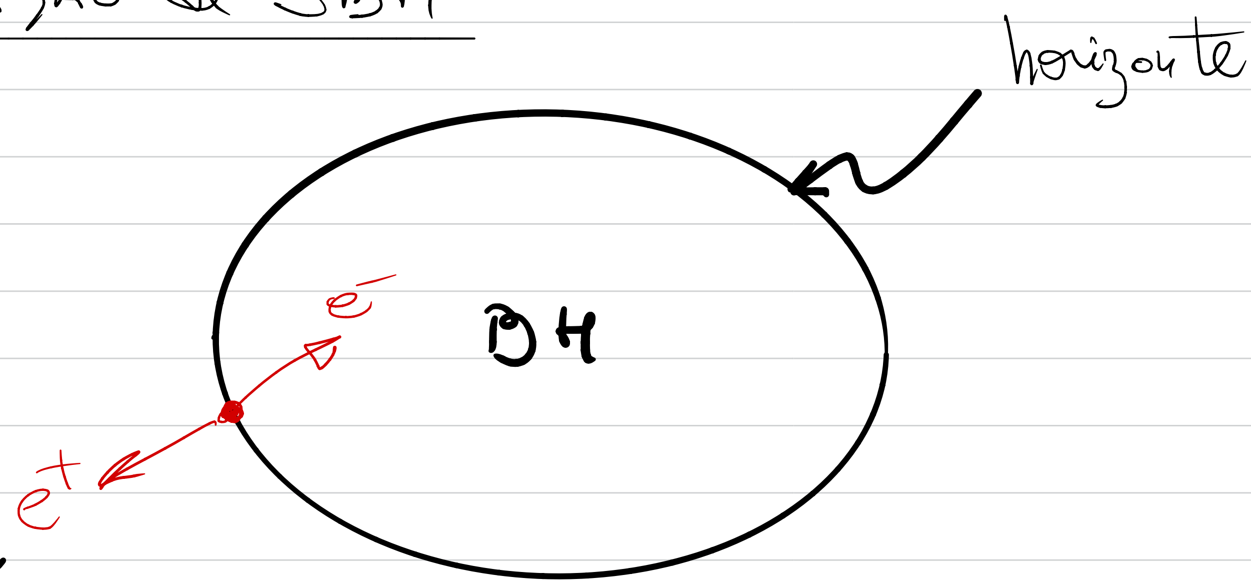
onde

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}}$$

comprimento de Planck

e A: área do horizonte de eventos

Derivação de S_{BH}



↳ Radiação correspondente a S_{BH}.

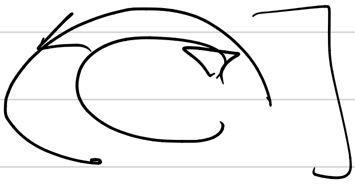
Sugere que S_{BH} é uma entropia de emaranhamento.

Muitas questões interessantes aparecem em física da matéria condensada (cf fases topológicas), teoria de cordas (problema da informação e buracos negros), teoria de campos (AdS/CFT, ...), etc.

Computação Quântica

Emaranhamento um papel central no fato de computadores quânticos terem uma grande vantagem computacional (em princípio) em relação a computadores clássicos.
A memória de um computador quântico pode ser considerada como consistente de n qbits o quantum bits. Eles correspondem a realizações físicas como átomos de momento angular 1/2, ou correntes supercondutoras, tal que sempre existe uma grandeza física que só pode ter 2 valores

$\pm \hbar/2$,



supercondutores de corrente

etc. Para simplificar, os 2 estados serão chamados $|0\rangle$ e $|1\rangle$.
Em geral, um estado de n qbits pode ser escrito como

$$|\Psi\rangle = \sum_{s_1,s_2 \dots s_n} C_{s_1,s_2,\dots s_n} |\Psi_{s_1,s_2 \dots s_n}\rangle$$

onde os s_i podem tomar 2 valores (eg 0 e 1, ± 1)
Os coeficientes $C_{s_1,\dots,s_n}$ são complexos e satisfazem

$$\sum_{s_1,s_2,\dots s_n} |C_{s_1,s_2,\dots s_n}|^2 = 1$$

Tem $2^n - 1$ coeficientes independentes.

$\Rightarrow$ Computador quântico com n q bits tem uma memória que contém

$$2^n - 1$$

números complexos independentes. Em princípio essa é a informação que o computador quântico pode acessar.

Um computador clássico com n bits pode armazenar um número binário de 0 a $2^n - 1$.

$$\underbrace{0\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0 \cdots 1\,0\,0}_{2^n - 1}$$

$\Rightarrow$ Capacidade do computador quântico é (em princípio) exponencialmente maior.

Qbit

Um qbit é descrito pelo estado

$$\left\{ |\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \right\}$$

Com α, β números complexos satisfazendo

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$\Rightarrow$ Só 3 dos 4 números reais são independentes.

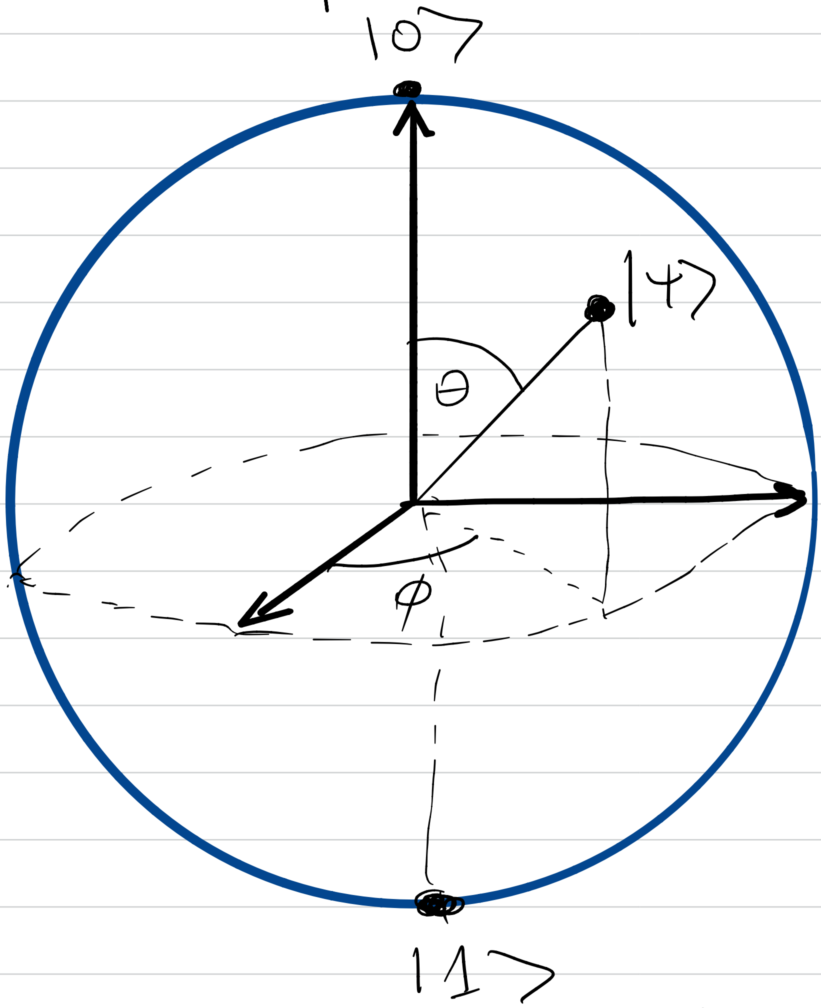
Portanto podemos reescrever $|\psi\rangle$ como

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma}\left\{\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}|1\rangle\right\}$$

mas a fase γ é irrelevante $\Rightarrow$ é suficiente com

$$\left\{|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}|1\rangle\right\}$$

o que pode ser representado numa esfera.



$\Rightarrow$ O estado $|\psi\rangle$ pode ocupar qualquer ponto na esfera de Bloch.

Multiplos Qbits

Se por exemplo temos 2 Qbits, definidos pela base

$$\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$$

com $$\sum_i |\alpha_i|^2 = 1$$

Operações em Qbits - Portas

Portas quânticas são operações unitárias realizadas em Qbits.
Classicamente, se considerarmos um único bit, a única porta lógica é a NOT: $0 \to 1$, $1 \to 0$.
No caso de um Qbit como

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$\text{Not} \Rightarrow \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle.$$

Em notação matricial

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; / \; X\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Em geral, portas atuando em 1 Qbit são transformações unitárias em 2x2 dimensões.

A diferença do caso clássico, existem mais portas atuando em 1 qbit (existem mais transformações unitárias).

Por exemplo, a porta Z é definida por

$$Z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e a porta de Hadamard, ou H é

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \begin{cases} -\boxed{X}- & \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle \\ -\boxed{Z}- & \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle \\ -\boxed{H}- & \alpha\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \beta\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

2 Qbits:

$\Rightarrow$ Portas são operações unitárias de 4x4: Eg

$$\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$$

Decoerência ⇒ Necessidade de correção de Erros : (erro de fase, bit flip eg $|0\rangle \Leftrightarrow |1\rangle$)

Realizações Físicas

- Armadilha de íons

Rede de íons que podem estar no estado fundamental ou num estado excitado. $|0\rangle$, $|1\rangle$. Podemos usar laser com a frequência correta, tanto para ler o estado, como para realizar operações (portas).

- Qbits Supercondutores (Google, IBM, ...)

Também usa 2 estados separados de energia

Eg: . número de pares de Cooper (carga)

. numero de quantos de fluxo magnético dentro de um circuito.

Referência Introdutória : "Quantum Computation and Quantum Information", M. Nielsen and I. Chuang (esp. Ch. 1)