Matriz Densidade

Até aqui temos trabalhado com a MQ formulada em termos de um estado

$$|\Psi\rangle$$

que pode ser expandido em diferentes bases, mas é o estado do sistema inteiro. Ou seja, todas as partículas (eg.) do sistema estão no estado $|\Psi\rangle$. Esse conjunto de partículas (ensamble) é então um conjunto puro. Ele está descrito por um único estado $|\Psi\rangle$. Nesse conjunto, falamos de estados puros.

Por outra parte, muitas vezes na prática temos uma mistura de estados puros. Por exemplo, um conjunto de átomos com $l=1$ pode (por alguma razão) ter 20% de probabilidade de ter $L_z=\hbar$, 30% de ter $L_x=0$ e 50% de ter $(L_x+L_y)/\sqrt{2}=\hbar$.

Para esses casos é de utilidade usar o operador densidade ρ e sua correspondente matriz. Vamos definir ρ primeiro no caso mais simples de estados puros, para depois passar ao caso mais interessante de estados misturados.

Estados Puros

Se considerarmos um conjunto tal que todos os membros estão no estado $|\Psi\rangle$, então o valor esperado de um observável dado A é

$$\langle A \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle$$

Aqui de fato $\langle A \rangle$ é a média dos resultados de medições feitos no conjunto de sistemas (ou partículas) todos no estado descrito por $|\Psi\rangle$, um estado puro.
Podemos reformular o mesmo se definimos o operador densidade ρ como

$$\left\{ \rho \equiv |\Psi\rangle\langle\Psi| \right\}$$

Se agora consideramos uma base ortonormal

$$\{|\psi_i\rangle\}$$

a matriz densidade é

$$\left\{ \rho_{ij} = \langle \psi_i | \Psi \rangle \langle \Psi | \psi_j \rangle \right\}$$

Mas o estado $|\Psi\rangle$ tem a expansão

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle$$

onde os coeficientes são

$$c_i = \langle \psi_i | \Psi \rangle \quad \text{assumindo} \quad \langle \Psi | \Psi \rangle = 1$$

e satisfazem $\sum_i |c_i|^2 = 1$

A partir da definição de ρ, assim como também usando as propriedades das base ortonormais, podemos derivar algumas propriedades da matriz / operador densidade.

- $\underline{\rho \text{ é um operador idempotente}}$

$$\rho^2 = \rho\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|\Psi\rangle\langle\Psi|$$

usando que $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$

$$\Rightarrow \{\rho^2 = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \rho\} \checkmark$$

- $\underline{\rho \text{ é hermitiano}}$

$$\rho^\dagger = (|\Psi\rangle\langle\Psi|)^\dagger = (\langle\Psi|)^\dagger(|\Psi\rangle)^\dagger$$

$$= |\Psi\rangle\langle\Psi| = \rho \checkmark$$

- $\underline{Tr(\rho) = 1}$

Sabemos que

$$\rho_{ij} = \langle\phi_i|\Psi\rangle\langle\Psi|\phi_j\rangle$$

$$\Rightarrow \rho_{ii} = \langle\phi_i|\Psi\rangle\langle\Psi|\phi_i\rangle$$

$$\rho_{ii} = c_i c_i^* = |c_i|^2$$

$$\Rightarrow \left\{Tr(\rho) = \sum_i \rho_{ii} = \sum_i |c_i|^2 = \underline{1}\right\} \checkmark$$

• Finalmente, o valor esperado de um dado observável A pode ser escrito como

$$\langle A \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle$$

$$= \sum_{i,j} \langle \psi_i | A | \psi_j \rangle c_i^* c_j$$

Mas $\rho_{ij} = c_i c_j^* \Rightarrow$

$$\langle A \rangle = \sum_{i,j} A_{ij} \rho_{ji} = Tr(A\rho) = Tr(\rho A)$$

$$\Rightarrow \left\{ \langle A \rangle = Tr(\rho A) \right\}$$

Vamos ver que quase todas essas propriedades da matriz densidade ainda são válidas para o caso de estados misturados. A única exceção será idempotência.

De fato podemos usar a matriz densidade para descrever um sistema, em lugar de usar o estado $|\Psi\rangle$ ou a função de onda $\Psi(\vec{x},t)$. Por exemplo, podemos derivar a evolução temporal de ρ usando a equação de Schrödinger.

Sabemos que

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = H|\Psi\rangle$$

e portanto

$$-i\hbar \frac{\partial \langle \Psi |}{\partial t} = \langle \Psi | H$$

Então

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)$$

$$= i\hbar \frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t}\langle\Psi| + i\hbar|\Psi\rangle\frac{\partial\langle\Psi|}{\partial t}$$

$$= H|\Psi\rangle\langle\Psi| - |\Psi\rangle\langle\Psi|H$$

$$= H\rho - \rho H$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho]}$$

Esta equação diferencial para ρ contém a mesma informação que a equação de Schrödinger para o estado $|\Psi\rangle$.

Exemplo de Estado Puro

Vamos considerar $|\Psi\rangle$ o estado que descreve um conjunto de partículas de spin 1/2 todos eles com $S_x = +\hbar/2$, ou spin ↑ na direção $\hat{x}$. Se usamos a base de autoestados de S_z, em notação espinorial,

$$|\Psi_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad e \quad |\Psi_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

podemos escrever o estado $|\Psi\rangle$ nessa base como

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

A matriz densidade é (nesta base)

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Alternativamente, poderíamos ter calculado cada elemento de ρ_{ij} usando

$$\rho_{ij} = \langle \psi_i | \Psi \rangle \langle \Psi | \psi_j \rangle$$

Eg.:

$$\rho_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \checkmark$$

etc.

É fácil ver que ρ satisfaz

$$\mathrm{Tr}(\rho) = 1$$

e

$$\rho^2 = \rho$$

tal como é esperado da matriz densidade de estados puros.

Estados Misturados

Vamos agora considerar a situação na qual o conjunto contem uma mistura de estados puros, cada um deles com uma probabilidade dada. Se os estados puros são

$$|\Psi_k\rangle$$

e cada um aparece com probabilidade p_k, então o valor esperado de um dado observável A no conjunto de estados puros $|\Psi_k\rangle$ é a média dos valores esperados em cada estado puro, pesados pelas probabilidades p_k:

$$\langle A\rangle = \sum_k p_k \langle \Psi_k | A | \Psi_k\rangle$$

É importante não confundir as probabilidades p_k (números reais) com os $|c_i|^2$. Os últimos são a probabilidade de obter um dado autovalor num estado puro!

O operador densidade ρ é então definido como a soma das densidades de cada setor de estados puros, pesada pelas probabilidades p_k:

$$\rho = \sum_k p_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|$$

Então a matriz densidade numa base em particular $\{|\psi_i\rangle\}$ é

$$\rho_{ij} = \sum_k p_k \langle\psi_i|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|\psi_j\rangle$$

As grandezas p_k, sendo elas probabilidades, satisfazem

$$p_k \geq 0 \quad e \quad \sum_k p_k = 1$$

É importante ressaltar que os estados puros $|\Psi_k\rangle$ são em geral NÃO ortogonais. I.e.:

$$\text{Em geral} \quad \langle\Psi_l|\Psi_k\rangle \neq 0$$

Vamos examinar as propriedades de ρ no caso de estados misturados. O primeiro que vemos é que

$$\boxed{\rho^2 \neq \rho}$$ se os estados são misturados.

De fato essa é uma forma de testar se um dado estado é puro ou misturado. As outras propriedades de ρ, porém, ainda são mantidos.

- Claramente temos $\underline{\rho^\dagger = \rho}$, dado que os p_k são reais.

- $\underline{Tr(\rho)}$:

$$\rho = \sum_k p_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{ij} = \sum_k p_k \langle\psi_i|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|\psi_j\rangle$$

$$= \sum_k p_k \, C_i^k \, C_j^{k*}$$

$$\Rightarrow Tr(\rho) = \sum_i \rho_{ii} = \sum_i \sum_k p_k |C_i^k|^2$$

$$= \sum_k p_k \sum_i |C_i^k|^2$$

Mas os C_i^k são a expansão de um estado puro $|\Psi_k\rangle$ na base ortonormal $\{|\psi_i\rangle\}$, então

$$\sum_i |C_i^k|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left\{ Tr(\rho) = \sum_k p_k = 1 \quad \checkmark \right\}$$

- $\underline{\langle A \rangle}$:

$$\langle A \rangle = \sum_k p_k \langle \Psi_k | A | \Psi_k \rangle$$

$$= \sum_k p_k \sum_{i,j} C_i^{k*} C_j^k \langle \psi_i | A | \psi_j \rangle$$

$$= \sum_k p_k \sum_{i,j} A_{ij} C_i^{k*} C_j^k$$

$$= \sum_{i,j} A_{ij} \underbrace{\sum_k p_k C_i^{k*} C_j^k}_{\rho_{ji}}$$

$$\Rightarrow \langle A \rangle = \sum_i \sum_j A_{ij} \rho_{ji}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle A \rangle = Tr(A\rho) = Tr(\rho A)} \checkmark$$

- Finalmente a evolução temporal ainda é dada por

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] \right\}$$

<u>sempre que</u> $\frac{\partial p_k}{\partial t} = 0 \quad \forall k$

Exemplo de Estado Misturado

Consideremos um conjunto de partículas de spin 1/2 tal que a probabilidade delas ter $S_z = +\hbar/2$ é 50%, e a probabilidade de $S_z = -\hbar/2$ é 50%.

$$\Rightarrow \quad p_1 = p_2 = 1/2 \,;\; |\Psi_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\; |\Psi_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

A matriz densidade é dada por

$$\rho = \sum_{k=1}^{2} p_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|$$

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \rho = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \right\}$$

Vemos que $Tr\,\rho = 1$, mas

$$\rho^2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\0 & 1/4\end{pmatrix} \neq \rho$$

dado que esse não é um estado puro

Matriz Densidade de Sistemas Compostos

Consideremos um sistema composto de 2 subsistemas, I e II. Os estados do sistema são definidos por

$$|\Psi_{KL}\rangle$$

com dois índices, K e L, indicando que o subsistema I está no estado $|\Psi_K\rangle$, enquanto que o subsistema II está no estado $|\Psi_L\rangle$. Será conveniente definir uma base ortonormal onde expandir os estados $|\Psi_{KL}\rangle$. Vamos definir ela com 2 índices, o primeiro referindo-se a uma base ortonormal em I e o segundo associado a uma base ortonormal II:

$$\{|\Psi_{ma}\rangle\} \Rightarrow \begin{cases} |\Psi_m\rangle \text{ em I} \\ |\Psi_a\rangle \text{ em II} \end{cases}$$

Notar que tanto os estados $|\Psi_{KL}\rangle$ como a base ortonormal definida pelos $|\Psi_{ma}\rangle$ não são em geral o produto dos estados associados a I e II.

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Em geral, } & |\Psi_{KL}\rangle \neq |\Psi_K\rangle \otimes |\Psi_L\rangle \\ \text{ou} & |\Psi_{ma}\rangle \neq |\Psi_m\rangle \otimes |\Psi_a\rangle \end{cases}$$

Em particular os estados não fatorizam no caso de emaranhamento.

Dado um operador A, os seus elementos de matriz na base ortonormal $\{|\Psi_{ma}\rangle\}$ são

$$\left\{ \langle \Psi_{ma} | A | \Psi_{nb} \rangle = A_{ma,nb} \right\}$$

onde os 4 índices se referem aos setores I(m n) e II (a b).
Se agora considerarmos um operador A que só atua (não trivialmente) no subsistema I, então temos

$$A_{ma,nb} = A^{I}_{mn} \delta_{ab}$$

onde A^I atua só nos estados do setor I.
A matriz densidade do sistema total é, escrita na base $\{|\Psi_{ma}\rangle\}$

$$\rho_{ma,nb} = \langle \Psi_{ma} | \rho | \Psi_{nb} \rangle$$

Portanto o valor esperado de A é

$$\langle A \rangle = \mathrm{Tr}(A\rho) = \mathrm{Tr}\left(A_{ma,nb}\, \rho_{nb,oc}\right)$$

$$= \sum_{ma} \sum_{nb} A_{ma,nb}\, \rho_{nb,ma}$$

$$= \sum_{ma} \sum_{nb} A^{I}_{mn} \delta_{ab}\, \rho_{nb,ma}$$

$$= \sum_{mn} A^{I}_{mn} \sum_{a} \rho_{na,ma}$$

Se agora definimos

$$\rho^{I}_{mn} \equiv \sum_{a} \rho_{ma,na}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\langle A \rangle = \sum_{mn} A^{I}_{mn}\, \rho^{I}_{nm}}$$

Podemos pensar que ρ^{I}_{mn} é a matriz densidade do subsistema ou setor I, a qual é relevante no caso em que o operador em questão só atua no setor I e nada faz no II.

Da mesma forma, ~~podemos~~ definir

$$\rho^{II}_{ab} = \sum_{m} \rho_{ma,mb}$$

como a matriz densidade do setor II.

Quando não existe nenhuma correlação entre os estados dos setores I e II, então os estados fatorizam. Eg

$$|\Psi_{kl}\rangle = |\Psi_k\rangle |\Psi_l\rangle$$

Nesse caso, a matriz densidade também fatoriza (provar)

$$\left\{ \rho_{ma,nb} = \rho^{I}_{mn}\, \rho^{II}_{ab} \right\}$$

Mas esse não é o caso mais geral, e em particular não é o caso em presença de emaranhamento.

Medição vs. Evolução Unitária

Existe uma diferência essencial entre a evolução unitária de um sistema e o que acontece no processo de medição. Vamos ver como essas diferências aparecem na matriz densidade. Mas também veremos que, independentemente de qual desses dois processos acontece, eles resultam em transformações lineares da matriz densidade.

Medição: Se começamos com um sistema descrito pelo operador densidade

$$\rho = \sum_k p_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|$$

ou

$$\rho = \sum_k p_k \Lambda_k$$

onde definimos

$$\Lambda_k \equiv |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|$$

o projetor no estado $|\Psi_k\rangle$. Se fazemos uma medição de algum observável físico, poremos o sistema em um dos autoestados desse operador, eg $|\Phi_\alpha\rangle$. Se o sistema estava em $|\Psi_k\rangle$, a probabilidade de estar em $|\Phi_\alpha\rangle$ depois da medição é

$$|\langle\Phi_\alpha|\Psi_k\rangle|^2$$

Então, a matriz densidade após a medição é dada por

$$\rho' = \sum_\alpha q_\alpha |\Phi_\alpha\rangle\langle\Phi_\alpha|$$

onde as probabilidades q_α são dadas por

$$q_\alpha = \sum_k p_k |\langle\Phi_\alpha|\Psi_k\rangle|^2$$

$$\Rightarrow \rho' = \sum_\alpha \sum_k p_k \langle\Phi_\alpha|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|\Phi_\alpha\rangle \Lambda_\alpha$$

$$= \sum_\alpha \langle\Phi_\alpha|\rho|\Phi_\alpha\rangle \Lambda_\alpha$$

$$= \sum_\alpha |\Phi_\alpha\rangle\langle\Phi_\alpha|\rho|\Phi_\alpha\rangle\langle\Phi_\alpha|$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho' = \sum_\alpha \Lambda_\alpha \rho \Lambda_\alpha}$$

Evolução Unitária: a evolução temporal dos estados $|\Psi_k\rangle$ de $t \to t'$ é dada por

$$|\Psi_k'\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t')} |\Psi_k\rangle$$

então a matriz densidade ρ' no tempo t' pode ser obtida como

$$\rho' = \sum_k p_k e^{-\frac{iH}{\hbar}(t'-t)} |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k| e^{\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}$$

o que pode ser rescrito como

$$\boxed{\rho' = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}\ \rho\ e^{\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}}$$

Uma das questões mais importantes de MQ, é o fato que não é possível achar um hamiltoniano H tal que para todos os ρ em tempo t a gente obtenha ρ' em tempo t' da forma que é obtida pelo processo de medição anterior. O processo de medição e o da evolução unitária são distintos de forma essencial.
Por outra parte, os dois casos compartilham uma característica muito importante: tanto no caso de transformação devida à medição como no da evolução temporal as transformações são lineares

Emaranhamento vs. Transmissão de Informação

Vimos que tanto a evolução temporal dos estados como o processo de medição (ou alguma combinação dos dois tipos de processos) resultam numa transformação linear $\rho \to \rho'$.
Em geral, para a matriz densidade podemos escrever

$$\rho'_{M'N'} = \sum_{MN} K_{M'M,N'N}\ \rho_{MN}$$

onde o $K_{M'M,N'N}$ é um c-número (não é um operador) e não depende de ρ. $K_{M'M,N'N}$ são os elementos da transformação linear $\rho \to \rho'$. Mas dado que

$$\mathrm{Tr}(\rho') = 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_{M'} K_{M'M,M'N} = \delta_{MN}}$$

Se agora voltamos a considerar um sistema com 2 partes isoladas entre elas, I e II, e substituímos os índices M, N, etc. por índices duplos ma, nb, etc., onde m, n, ... corresponde aos estados de I e a, b, ... aos estados de II, a matriz densidade é, como vimos anteriormente,

$$\rho_{ma,nb}$$

e em geral <u>NÃO É FATORIZÁVEL</u> em $\rho^{I}_{mn}\rho^{II}_{ab}$.

Porém, é possível mostrar que, se temos dos setores I e II isolados (i.e. sem influência física de um no outro o fluxo de informação entre eles) a matriz K sim fatoriza:

$$\boxed{K_{m'a'ma,n'b'nb} = K^{I}_{m'm,n'n}\; K^{II}_{a'a,b'b}}$$

Para provar isso, basta mostrar que esse é o caso para $e \to e'$ devido à medição e a uma evolução unitária.
Primeiro, vamos provar a fatorização de K para o caso da medição. Se medimos algum observável no setor I, ele tomará resultará em autovalores associados a uma base ortonormal em I, $\{|\Phi^{I}_{\mu}\rangle\}$; entanto que se medimos um observável no setor II, resultará num dos estados de uma base ortonormal atuando em II, $\{|\Phi^{II}_{\alpha}\rangle\}$. Então o ato das medições nos setores I e II projeta o sistema total com o operador de projeção

$$\left\{\begin{aligned}(\Lambda_{\mu\alpha})_{m'a',ma} &= (\Lambda^{I}_{\mu})_{m'm}(\Lambda^{II}_{\alpha})_{a'a} \\ &= (|\Phi^{I}_{\mu}\rangle\langle\Phi^{I}_{\mu}|)_{m'm}(|\Phi^{II}_{\alpha}\rangle\langle\Phi^{II}_{\alpha}|)_{a'a}\end{aligned}\right\}$$

Novamente, isto não quer dizer que o estado do sistema total seja fatorizável. Só quer dizer que o sistema estará, após a medição em $|\Phi^{I}_{\mu}\rangle|\Phi^{II}_{\alpha}\rangle$ com alguma amplitude. I.e.

$$\Lambda^{I}_{\mu}\Lambda^{II}_{\alpha}|\Psi_{KL}\rangle = |\Phi^{I}_{\mu}\rangle|\Phi^{II}_{\alpha}\rangle\langle\Phi^{I}_{\mu}\Phi^{II}_{\alpha}|\Psi_{KL}\rangle$$

Usando agora que a matriz densidade após a medição é dada por

$$\rho' = \sum_{\mu\alpha} \Lambda_{\mu\alpha}\, \rho\, \Lambda_{\mu\alpha} \qquad \text{(ver acima)}$$

Pondo os índices:

$$\rho'_{m'a',n'b'} = \sum_{\mu\alpha} \sum_{ma} \sum_{nb} (\Lambda_{\mu\alpha})_{m'a',ma}$$

$$\times\, (\Lambda_{\mu\alpha})_{n'b',nb}\, \rho_{ma,nb}$$

Portanto K é:

$$K_{m'a'ma,n'b'nb} = \sum_{\mu\alpha} (\Lambda_{\mu\alpha})_{m'a',ma} (\Lambda_{\mu\alpha})_{n'b',nb}$$

o que, usando a fatorização de $\Lambda_{\mu\alpha}$, resulta em

$$= \left(\sum_{\mu} (\Lambda^{I}_{\mu})_{m'm} (\Lambda^{I})_{n'n}\right) \left(\sum_{\alpha} (\Lambda^{II}_{\alpha})_{a'a} (\Lambda^{II}_{\alpha})_{b'b}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{m'a'ma,n'b'nb} = K^{I}_{m'm,n'n}\, K^{II}_{a'a,b'b}} \qquad \text{QED}$$

No caso da transformação $\rho \to \rho'$ por evolução temporal, a prova é ainda mais fácil dado que o hamiltoniano do sistema é

$$H_{ma,nb} = H^{I}_{mn}\,\delta_{ab} + H^{II}_{ab}\,\delta_{mn}$$

sendo que se trata de dois subsistemas I e II, completamente isolados, sem interações entre eles. (Provar em lista).

Dado que K^{I} e K^{II} são transformações físicas possíveis de atuar independentemente em matrices densidade, devem satisfazer

$$\sum_{m'} K^{I}_{m'm,m'n} = \delta_{mn}$$

e

$$\sum_{a'} K^{II}_{a'a,a'b} = \delta_{ab}$$

Para ver como a fatorização do K resulta na impossibilidade de transmissão de informação entre os sistemas I e II, mesmo na presença de emaranhamento, lembramos que, sem informação do setor II, a matriz densidade de I é

$$\rho^{I}_{mn} = \sum_{a} \rho_{ma,na}$$

o que resultava de considerar um observável A que só atua em I. Se agora consideramos uma transformação

$$\rho^{I} \longrightarrow \rho^{I'}$$

induzida por alguma medição e/ou evolução unitária, que pode acontecer em II, ou em I ou nos 2 setores, vemos que, partindo de

$$\rho'_{m'a',n'b'} = \sum_{manb} K_{m'a'ma,n'b'nb}\, \rho_{ma,nb}$$

$$= \sum_{manb} K^{I}_{m'm,n'n} K^{II}_{a'a,b'b}\, \rho_{ma,nb}$$

Portanto:

$$\rho^{I'}_{m'n'} = \sum_{a'} \rho'_{m'a',n'a'}$$

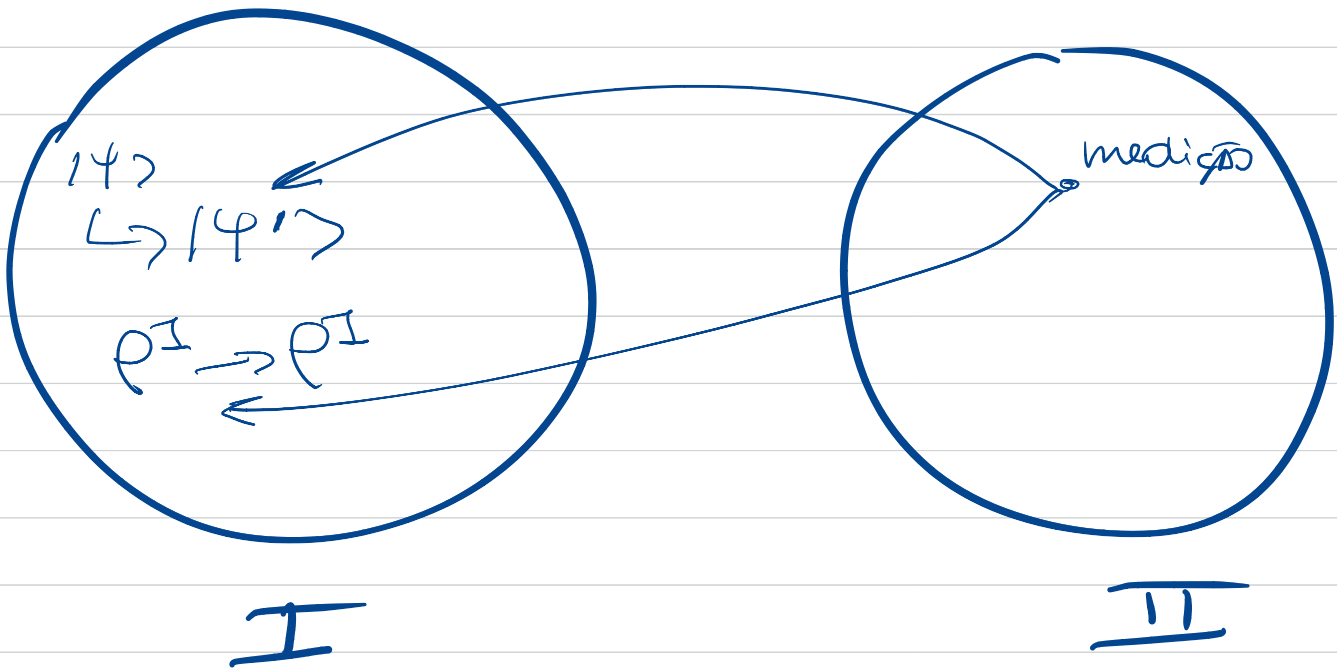
$$= \sum_{a'} \sum_{manb} K^{I}_{m'm,n'n} \underbrace{K^{II}_{a'a,a'b}}_{\delta_{ab}}\, \rho_{ma,nb}$$

$$= \sum_{man} K^{I}_{m'm,n'n}\, \rho_{ma,na}$$

$$\rho^{I'}_{m'n'} = \sum_{mn} K^{I}_{m'm,n'n}\, \rho^{I}_{mn}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho^{I'}_{m'M'} = \sum_{mM} K^{I}_{m'm,\, m'm}\, \rho^{I}_{mM}}$$

$\Rightarrow$ a evolução de ρ^{I} é totalmente independente de ρ^{II}! Seja que ela vem de uma medição no setor II ou não. Então, nos estados emaranhados é possível modificar os estados de I fazendo medições em II ou modificando o hamiltoniano em II. Mas essas ações não afetam a matriz densidade em I. Portanto, a evolução do subsistema, e os resultados de medições nele só dependem da sua matriz densidade. O emaranhamento não permite de fato a transmissão instantânea de informação a distância.



Como os transformações não dependem do estado mas só da matriz densidade $\Rightarrow$ OK.