

Emaranhamento e Paradoxos

Emaranhamento, no contexto da mecânica quântica de intermédia, se refere às correlações quânticas que aparecem em sistemas de 2 ou mais partículas. Essas correlações podem persistir mesmo quando as partículas estão separadas por distâncias microscópicas. Essa característica da mecânica quântica foi o que levou a vários questionamentos sobre a consistência e/ou completude. O mais importante desses questionamentos é o paradoxo de Einstein-Podolski-Rosen (EPR), de 1935, que foi posteriormente refutado pelo David Bohm em 1952. Vamos ver o argumento do EPR e como a versão de Bohm também supõe a existência de variáveis ocultas, o que resultaria numa formulação determinista da MQ. Na sequência, vamos provar o Teorema de Bell, que mostra que, em geral, teorias com variáveis ocultas são incompatíveis com a MQ e que esta incompatibilidade tem consequências experimentais.

Paradoxo de EPR

Consideremos um experimento em que duas partículas se movimentam no eixo x com coordenadas X_1 e X_2 , e momentos P_1 e P_2 .

Vamos assumir que, de alguma forma, eles foram produzidos num estado dos observáveis $x_1 - x_2$ e $p_1 + p_2$:

$$|x_1 - x_2 ; p_1 + p_2\rangle$$

Em particular consideremos os autovalores

$$\begin{cases} x_0 \equiv x_2 - x_1 \\ 0 = p_1 + p_2 \end{cases}$$

Do ponto de vista da MQ, constatar esse estado não é um problema pois que

$$[x_1 - x_2 ; p_1 + p_2] = 0$$

Vamos considerar valores de x_0 microscópicos, i.e., muito pequenos como para que as partículas possam ter alguma influência uma sobre a outra.

A função de onda do sistema é do tipo

$$e^{ikx_1} e^{-ikx_2}$$

integrada nos possíveis valores de k , mas com a condição que

$$x_2 - x_1 = x_0$$

Portanto, ela é dada por

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x_1 - x_2 + x_0)} dk$$

$$\Rightarrow \Psi(x_1, x_2) = (2\pi) \delta(x_1 - x_2 + x_0)$$

Claramente, esta função de onda não é normalizável, mas a discussão pode proceder do mesmo jeito mesmo considerando uma versão aproximada de $\Psi(x_1, x_2)$ que é normalizável.

Por exemplo, podemos imaginar que uma partícula em repouso decai em duas que saem em direções opostas e com momento opostos (e.g. mesma massa). EPR considerem a situação na qual 2 observadores macroscopicamente separados medem as propriedades das partículas 1 e 2.

Por exemplo, se o observador da partícula 1 mede o momento

$$+ \hbar k_1$$

então ele sabe (instantaneamente) que o estado da partícula 2 é

$$- \hbar k_1$$

os dois bem definidos.

MAS se em lugar de medir o momento, o que é medido é a posição da partícula 1, x_1 ,

Agora sabemos que a partícula 2 está em
 $x_1 + x_0$

Bem definida.

Agora nós sabemos que dado que

$$[x_1, t_1] \neq 0$$

as medições da posição e do momento da partícula 1 interferem entre elas (ex. se medirmos o momento primeiro, a medição de posição deixa o momento indeterminado e viceversa). MAS ao mesmo tempo a ordem das medições das propriedades da partícula 1 afetam as propriedades da partícula 2! Como isso pode ser, como pode ser os dois estão muito longe uma da outra? Se assumirmos que não é o caso (não existe ação a distância e enmaraalhamento) então devemos concluir (EPR concluem) que a partícula 2 tem momento e posição bem definidos desde o começo! MAS isso está em contradição com o fato de x_2 e t_2 não comutarem em MQ.

O paradoxo de EPR implica (segundo EPR) que a MQ é incompleta, e que portanto deve existir uma formulação determinista por trás dela. O ponto central que leva a EPR a essa conclusão é a imposição de localidade. Porém, como sabemos e veremos logo, a MQ é intrinsecamente NÃO LOCAL. Essa é a propriedade que permite o enmaraalhamento.

Formulação de Bohm Bohm considera o decaimento de um estado de momento angular total $= 0$ (E.g. uma partícula em repouso com $S_{\text{spin}} = 0$) em duas partículas de $S_{\text{spin}} = 1/2$. O estado das duas partículas é o singlete de $S = 0$;

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \right\}$$

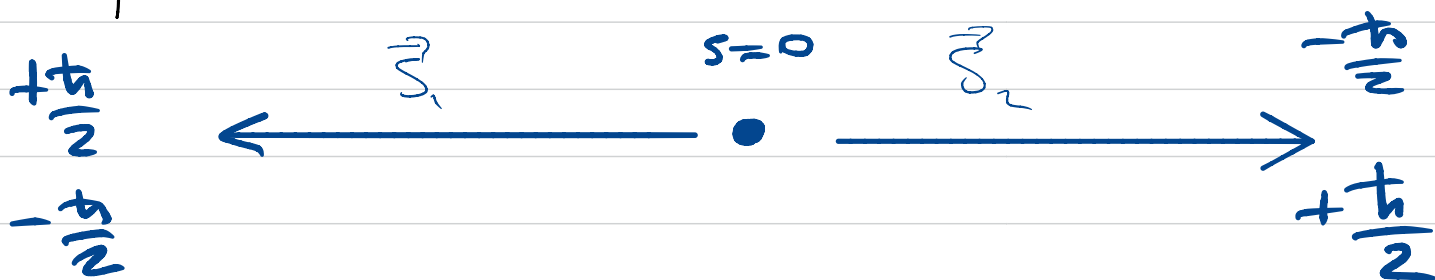
onde as flechas indicam as componentes dos spins $\vec{S}_1$ e $\vec{S}_2$ na direção $\hat{z}$. Se agora um observador mede a componente z do spin da partícula 1 ele pode obter

$$+\frac{\hbar}{2} \text{ ou } -\frac{\hbar}{2}$$

Isto quer dizer que se a componente z da partícula 2 é medida os resultados devem ser

$$-\frac{\hbar}{2} \text{ e } +\frac{\hbar}{2}$$

respectivamente, em cada caso.



Bohm argumenta que a medição da partícula 1 não pode influenciar o resultado da medição da S_z da partícula 2 por elas estarem muito afastadas. Então ele conclui que os spins na direção $\hat{z}$ já determinados desde o começo. Até aqui não temos contradição com a MQ em si. Tudo o que devemos fazer é ter uma interpretação realista dela: os partículas 1 e 2 têm valores de S_{1z} e S_{2z} definidos mesmo antes da medição.

O problema aparece quando imaginamos que o observador mede agora a componente $\hat{x}$ de $\vec{S}_1$, S_{1x} , também com resultados $+\frac{\hbar}{2}$ ou $-\frac{\hbar}{2}$, o que implica que uma medição de S_{2x} da partícula 2 deve resultar em $+\frac{\hbar}{2}$ e $-\frac{\hbar}{2}$ respectivamente. O mesmo pode ser dito se agora se medem S_{1y} e S_{2y} . Bohm conclui então que os 3 componentes de $\vec{S}_2$, S_{2x} , S_{2y} e S_{2z} devem estar bem definidos desde o começo se quisermos barrar a ação à distância (barrar emaranhamento). Mas a MQ proíbe isso dado que

$$[S_{2i}, S_{2j}] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_{2k}$$

o mesmo para $\vec{S}_1$. Bohm então conclui que a MQ precisa ser modificada. Como veremos ele (entre outros) propõe a existência de variáveis determinísticas "ocultas" de forma de

explicar os resultados da MQ consistentes com variáveis determinísticas LOCAIS, i.e. sem precisar de aceitar que a teoria fundamental é NÃO-local.

Emaranhamento e Comunicação Instantânea

A presença de emaranhamento em MQ sempre resulta na pergunta de se ele permite comunicação instantânea. A resposta é NÃO.

Por exemplo, nos casos vistos acima, se o observador da partícula 2 obtém algum resultado dado, ele não tem como saber se esse valor é resultado de uma medição da partícula 1, ou se a partícula 1 tinha uma distribuição de momentos e, após fazendo várias medições os resultados são reflexo dessa distribuição e de medições.

O ponto central é que o emaranhamento afeta o estado $|T_2\rangle$ de forma instantânea, mas os resultados das medições, não podem ser transmitidos instantaneamente entre os observadores.

A forma mais clara de demonstrar isso em MQ é usando o formalismo da matriz densidade e sua evolução unitária. Vamos introduzir esse formalismo nas próximas aulas.

Teorema de Bell

Vamos considerar a possibilidade que, para evitar as consequências do emaranhamento, existam certas variáveis ocultas locais. No caso descrito por Bohm, em lugar de descobrir o estado dos 2 partículas pelo estado $|\Psi\rangle$ singlete

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \}$$

assumimos que o estado de duas partículas é descrito por um conjunto de possíveis estados caracterizador por um parâmetro o conjunto de parâmetros que chamaremos coletivamente de λ . Deste forma o valor da componente do spin da partícula 1 numa direção $\hat{a}$ é uma função bem definida dada por

$$\left\{ \frac{\hbar}{2} S(\hat{a}, \lambda) \right\}$$

onde $S(\hat{a}, \lambda)$ só pode tomar os valores ± 1 . Se o spin da partícula 2 é medido, também na direção $\hat{a}$, conservação do momento angular garante que o resultado será

$$-\frac{\hbar}{2} S(\hat{a}, \lambda)$$

O parâmetro λ é fixado antes das partículas se separarem, portanto não haverá problemas

de não-localidade. Dado que queremos que o resultado tenha as características probabilísticas da MQ, consideramos que os valores de λ são randomicamente distribuídos, com uma densidade de probabilidade $P(\lambda)$ que satisfaz

$$\int P(\lambda) d\lambda = 1$$

$$\text{e } P(\lambda) \geq 0.$$

O observável de interesse é a correlação entre os spins dos dois partículas, projetados nas direções $\hat{a}$ e $\hat{b}$ em geral diferentes. Ela pode ser expressada como a média do produto das projeções nas direções $\hat{a}$ e $\hat{b}$:

$$\langle (\vec{S}_1 \cdot \hat{a}) (\vec{S}_2 \cdot \hat{b}) \rangle$$

Lembrando que $\vec{S}_1 = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_1$; $\vec{S}_2 = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_2$, onde $\vec{\sigma}_1$ e $\vec{\sigma}_2$ são as matrizes de Pauli e lembrando a informação dos spins, podemos lembrar que as matrizes de Pauli satisfazem

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

$$\Rightarrow (\vec{S}_1 \cdot \hat{a}) (\vec{S}_1 \cdot \hat{b}) = \frac{\hbar^2}{4} \hat{a} \cdot \hat{b} + i \frac{\hbar}{2} (\hat{a} \times \hat{b}) \cdot \vec{S}_1$$

Válida em MQ.

Mas na situação de interesse temos

$$\vec{S}_1 = -\vec{S}_2$$

E portanto a previsão na MQ para a correlação dos spins é

$$\langle (\vec{S}_1 \cdot \hat{a})(\vec{S}_2 \cdot \hat{b}) \rangle_{MQ} = -\frac{\hbar^2}{4} \hat{a} \cdot \hat{b}$$

onde usamos que $\langle \vec{S}_1 \rangle = 0$ nesse estado. Mas, se agora calcularmos a correlação dos spins usando uma teoria com variáveis ocultas locais com distribuição de probabilidade $P(\lambda)$, obtemos que

$$\langle (\vec{S}_1 \cdot \hat{a})(\vec{S}_2 \cdot \hat{b}) \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \int d\lambda P(\lambda) S(\hat{a}, \lambda) S(\hat{b}, \lambda)$$

↳ Previsão na teoria com variáveis ocultas locais

Não é nenhum problema achar funções S e densidades de probabilidade $P(\lambda)$ para as quais as duas previsões são iguais para qualquer escolha de 2 direções $\hat{a}$ e $\hat{b}$. Por exemplo, se $\hat{a} = \hat{b}$ as duas expressões são idênticas trivialmente

$$\langle (\vec{S}_1 \cdot \hat{a})(\vec{S}_2 \cdot \hat{a}) \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \int P(\lambda) d\lambda S^2(\hat{a}, \lambda) = -\frac{\hbar^2}{4}$$

Então, aparentemente, não existe forma de distinguir experimentalmente entre teorias com variáveis ocultas e a mecânica quântica. MAS o John Bell mostrou (1964) que de fato existe um conflito quando se consideram 3 direções diferentes, $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$. Vamos ver que neste caso as funções de correlação satisfazem desigualdades que em geral NÃO SÃO SATISFEITAS pelas previsões da MQ.

Desigualdades de Bell

De acordo com as propriedades das teorias de variáveis ocultas locais que vimos acima podemos escrever

$$\begin{aligned} & \langle (\vec{S}_1 \cdot \hat{a})(\vec{S}_2 \cdot \hat{b}) \rangle - \langle (\vec{S}_1 \cdot \hat{a})(\vec{S}_2 \cdot \hat{c}) \rangle \\ &= -\frac{\hbar^2}{4} \int P(\lambda) d\lambda \left\{ S(\hat{a}, \lambda) S(\hat{b}, \lambda) - S(\hat{a}, \lambda) S(\hat{c}, \lambda) \right\} \end{aligned}$$

Mas usando que $S^2(\hat{b}, \lambda) = 1$ e inserindo ele no segundo termo do lado direito, obtemos

$$\begin{aligned} & \langle (\vec{S}_1 \cdot \hat{a})(\vec{S}_2 \cdot \hat{b}) \rangle - \langle (\vec{S}_1 \cdot \hat{a})(\vec{S}_2 \cdot \hat{c}) \rangle \\ &= -\frac{\hbar^2}{4} \int P(\lambda) d\lambda S(\hat{a}, \lambda) S(\hat{b}, \lambda) \left\{ 1 - S(\hat{b}, \lambda) S(\hat{c}, \lambda) \right\} \end{aligned}$$

Se agora tomarmos o valor absoluto nos dois lados, do lado direito temos que o valor absoluto da integral é, no máximo, a integral do valor absoluto:

$$\frac{\hbar^2}{4} \left| \int P(\lambda) d\lambda S(\hat{a}, \lambda) S(\hat{b}, \lambda) \{1 - S(\hat{b}, \lambda) S(\hat{c}, \lambda)\} \right|$$

$$\leq \frac{\hbar^2}{4} \int P(\lambda) d\lambda \{1 - S(\hat{b}, \lambda) S(\hat{c}, \lambda)\}$$

onde usamos que

- $P(\lambda) \geq 0$
- $|S(\hat{a}, \lambda) S(\hat{b}, \lambda)| = 1$
- $S(\hat{b}, \lambda) S(\hat{c}, \lambda) \leq 1$ de forma que $|\{ \} | = \{ \}$ na integral

Finalmente chegamos à desigualdade de Bell:

$$\left| \langle (\vec{S}_1 \cdot \hat{a})(\vec{S}_2 \cdot \hat{b}) \rangle - \langle (\vec{S}_1 \cdot \hat{a})(\vec{S}_2 \cdot \hat{c}) \rangle \right|$$

$$\leq \frac{\hbar^2}{4} \int P(\lambda) d\lambda \{1 - S(\hat{b}, \lambda) S(\hat{c}, \lambda)\}$$

Mas usando $\int P(\lambda) d\lambda = 1$, e a definição da correlação de spins na teoria com variáveis ocultas locais

$$\langle (\vec{S}_1 \cdot \hat{b})(\vec{S}_2 \cdot \hat{c}) \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \int P(\lambda) d\lambda S(\hat{b}, \lambda) S(\hat{c}, \lambda)$$

finalmente obtemos

$$\left| \langle (\vec{S}_1 \cdot \hat{a})(\vec{S}_2 \cdot \hat{b}) \rangle - \langle (\vec{S}_1 \cdot \hat{a})(\vec{S}_2 \cdot \hat{c}) \rangle \right| \leq \frac{\hbar^2}{4} + \langle (\vec{S}_1 \cdot \hat{b})(\vec{S}_2 \cdot \hat{c}) \rangle$$

Essa é a desigualdade de Bell original. O ponto crucial é que para certas escolhas dos eixos $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$, essa desigualdade NÃO É satisfeita pela função de correlação da MQ

$$\langle (\vec{S}_1 \cdot \hat{a})(\vec{S}_2 \cdot \hat{b}) \rangle_{MQ} = -\frac{\hbar^2}{4} \hat{a} \cdot \hat{b}$$

Por exemplo, se escolhermos

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = 0 \quad \text{e} \quad \hat{c} = \frac{\hat{a} + \hat{b}}{\sqrt{2}}$$

Se usarmos a função de correlação da MQ, o lado esquerdo da desigualdade é

$$\left| 0 + \frac{\hbar^2}{4} \hat{a} \cdot \frac{(\hat{a} + \hat{b})}{\sqrt{2}} \right| = \frac{\hbar^2}{4\sqrt{2}}$$

Por outro lado direito é

$$\frac{\hbar^2}{4} - \frac{\hbar^2}{4} \hat{b} \cdot \frac{(\hat{a} + \hat{b})}{\sqrt{2}} = \frac{\hbar^2}{4} - \frac{\hbar^2}{4\sqrt{2}}$$

MAS claramente o lado esquerdo é MAIOR que o direito, NÃO é menor. Portanto a função de correlação de spins na MQ viola a desigualdade de Bell.

Concluímos que se determinarmos experimentalmente as funções de correlação

$$\langle (\vec{S}_1 \cdot \hat{a})(\vec{S}_2 \cdot \hat{b}) \rangle, \langle (\vec{S}_1 \cdot \hat{a})(\vec{S}_2 \cdot \hat{c}) \rangle \text{ e } \langle (\vec{S}_1 \cdot \hat{b})(\vec{S}_2 \cdot \hat{c}) \rangle$$

podemos decidir entre as previsões da mecânica quântica e as de qualquer teoria de variáveis ocultas locais. De fato, começando em 1981, estes experimentos tem sido feitos. Vamos ver Depois que, dado que foram feitos com fótons em lugar de com partículas de spin $1/2$, vamos precisar reformular a desigualdade de Bell. MAS o fato é que as medições das funções de correlação violam a desigualdade de Bell, do jeito que só as previsões da MQ podem fazê-lo. Portanto estes experimentos confirmam a MQ e descartam a possibilidade da existência de variáveis ocultas locais.

Generalização da Desigualdade de Bell

Os tests experimentais da desigualdade de Bell, feitos com fótons a partir dos anos 1980, de fato testam uma generalização da versão originalmente obtida por Bell para partículas de Spin $1/2$.

Para generalizar a desigualdade obtida acima, vamos considerar que para a partícula n existe uma grandeza $S_n(\hat{a})$ associada a uma direção espacial $\hat{a}$ e que só pode tomar valores ± 1 . Por exemplo, um caso particular seria a projeção do spin da partícula n , $\vec{S}_n \cdot \hat{a}$ (em unidades de $\hbar/2$ no caso de partículas de Spin $1/2$ que foi discutido anteriormente). Se agora considerarmos uma teoria de variáveis ocultas locais (VOL) os valores medidos de $S_n(\hat{a})$ devem ser dados por uma função bem definida $S_n(\hat{a}, \lambda)$ de um parâmetro ou conjunto de parâmetros λ , os quais tem valores fixos antes das partículas se separarem (as variáveis λ são locais). Os valores λ tem associadas a eles uma densidade de probabilidade $P(\lambda)$, tal que $P(\lambda)d\lambda$ é a probabilidade deles ter valores entre λ e $\lambda + d\lambda$.

Se agora considerarmos 2 partículas com valores das grandezas $S_1(\hat{a})$ e $S_2(\hat{b})$, a função de correlação entre elas na teoria VOL é a média do produto:

$$\langle S_1(\hat{a}) S_2(\hat{b}) \rangle = \int d\lambda P(\lambda) S_1(\hat{a}, \lambda) S_2(\hat{b}, \lambda)$$

Vamos considerar 4 possíveis direções: $\hat{a}, \hat{b}, \hat{a}'$ e $\hat{b}'$. Com elas vamos construir a grandeza

$$\begin{aligned} & \langle S_1(\hat{a}) S_2(\hat{b}) \rangle - \langle S_1(\hat{a}) S_2(\hat{b}') \rangle + \langle S_1(\hat{a}') S_2(\hat{b}) \rangle + \langle S_1(\hat{a}') S_2(\hat{b}') \rangle \\ &= \int d\lambda P(\lambda) \left\{ S_1(\hat{a}, \lambda) S_2(\hat{b}, \lambda) - S_1(\hat{a}, \lambda) S_2(\hat{b}', \lambda) \right. \\ & \quad \left. + S_1(\hat{a}', \lambda) S_2(\hat{b}, \lambda) + S_1(\hat{a}', \lambda) S_2(\hat{b}', \lambda) \right\} \end{aligned}$$

Onde o lado direito é a dado na Teoria LOCAL. Queremos obter os possíveis valores da soma nos $\{ \}$ do lado direito. Para isso construímos a tabela com todos os $2^4 = 16$ possíveis combinações:

$S_1(\hat{a}, \lambda)$	+	+	+	+	+	+	+	...
$S_2(\hat{b}, \lambda)$	+	+	+	+	-	-	-	...
$S_1(\hat{a}', \lambda)$	+	+	-	-	+	+	-	...
$S_2(\hat{b}', \lambda)$	+	-	+	-	+	-	+	...
$\{ \}$	2	2	-2	2	-2	-2	-2	...

$\Rightarrow$ os únicos resultados para $\{ \} = +2, -2, 0$

Portanto, se tomarmos valor absoluto dos
lados da igualdade, e sabendo que

$$|\{ \} | \leq 2$$

obtemos

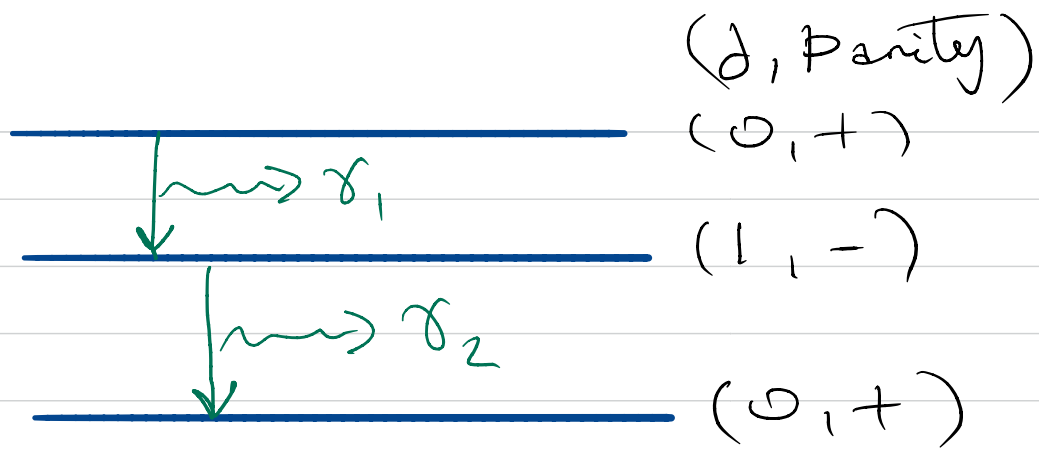
$$| \langle S_1(\hat{a}) S_2(\hat{b}) \rangle - \langle S_1(\hat{a}) S_2(\hat{b}') \rangle + \langle S_1(\hat{a}') S_2(\hat{b}) \rangle + \langle S_1(\hat{a}') S_2(\hat{b}') \rangle | \leq 2$$

Essa é a desigualdade de Bell generalizada.
Ela é válida para um conjunto ainda mais
amplio de teorias LOL do que a desigual-
dade original dada que NÃO precisamos
para a sua derivação de assumir que

$$S_2(\hat{a}, \lambda) = -S_1(\hat{a}, \lambda) \quad \times$$

Teste Experimental

Alain Aspect et al. (1981, 1982)
Mediram correlações entre as polariza-
ções dos fótons em transições em
casca de dos fótons. O primeiro fóton,
 γ_1 , é emitido de um átomo de cálcio num
estado $j=0$, para a um estado de $j=1$, ímpar.
Esse estado também decai no segundo fóton, γ_2 ,
de novo a um estado de $j=0$ e para.
Dado que o estado inicial é $j=0$, conservação de
momento angular $\Rightarrow$ total correlação nas polarizações
angulares dos 2 fótons. Dado que a periodicidade na fun-
ção vale de PAR $\rightarrow$ PAR $\Rightarrow$ polarização linear também.



Os fótons γ_1 e γ_2 passam por polarizadores. Um polarizador deixa passar γ , para ser detectado se ele está polarizado na direção $\hat{a}$ (lembrando que $\hat{a}$ é sempre transversa, $\Rightarrow$ perpendicular à direção do momento $\vec{k}$). Nesse caso obtemos $S_1(\hat{a}) = +1$. Mas se γ_1 tem uma polarização linear perpendicular a $\hat{a}$, então temos $S_1(\hat{a}) = -1$. Da mesma forma o fóton γ_2 passa por outro polarizador com polarização linear $\perp$ a $-\vec{k}$. Se este $\perp$ à direção $\hat{b} \Rightarrow$ $S_2(\hat{b}) = +1$. Se este $\perp$ à direção $\hat{b}$ do polarizador $\Rightarrow$ $S_2(\hat{b}) = -1$.

A amplitude total da transição deve depender dos vetores de polarização de γ_1 e γ_2 , $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_2$. Mas dado que a transição é de um estado inicial PAR e o estado final também PAR, a forma da depa dependência deve ser

$$\{ A(2\gamma) \propto \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \}$$

(ex $\vec{k} \cdot (\hat{e}_1 \times \hat{e}_2)$ está descartada por ser de paridade ímpar).

Desta forma, a probabilidade de γ_1 ter polarização $\hat{a}$ e γ_2 ter polarização na direção $\hat{b}$ é

$$\frac{(\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2)^2}{2}$$

Onde introduzimos o fator $\frac{1}{2}$, dado que se somamos 2 direções perpendiculares $\hat{1}$ e $\hat{2}$, a soma deve ser 1:

$$\frac{(\hat{1} \cdot \hat{1})^2}{2} + \frac{(\hat{2} \cdot \hat{2})^2}{2} = 1 \quad \checkmark$$

Para calcular a média de $S_1(\hat{a})S_2(\hat{b})$ na Mecânica Quântica devemos somar os 4 possibilidades vindo de $S_1(\hat{a}) = \pm 1$ e $S_2(\hat{b}) = \pm 1$, cada uma delas com o peso da probabilidade $(\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2)^2 / 2$.
Por exemplo, o termo

$$S_1(\hat{a}) = +1, S_2(\hat{b}) = +1$$

corresponde à situação $\vec{e}_1 \parallel \hat{a}$ e $\vec{e}_2 \parallel \hat{b}$. Nesse caso temos que o peso é

$$\left\{ \frac{(\hat{a} \cdot \hat{b})^2}{2} = \frac{1}{2} \cos^2 \Theta_{ab} \right\}$$

onde Θ_{ab} é o ângulo entre as direções das polarizações.

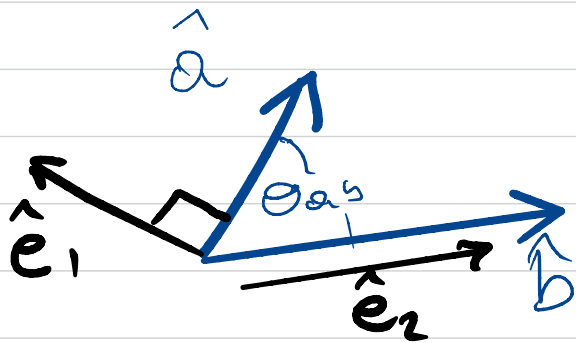
Similarmante, no caso $S_1(\hat{a}) = -1, S_2(\hat{b}) = 1$
temos que $\hat{e}_1 \perp \hat{a}, \hat{e}_2 \perp \hat{b}$

e, portanto

$$\left\{ (\hat{e}_1 - \hat{e}_2)^2 = (\hat{a} \cdot \hat{b})^2 = \cos^2 \theta_{ab} \right\}$$

Porém, para o caso $S_1(\hat{a}) = -1, S_2(\hat{b}) = +1$
temos $\hat{e}_1 \perp \hat{a}, \hat{e}_2 \parallel \hat{b}$

$$\Rightarrow \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \cos(\theta_{ab} \pm \frac{\pi}{2}) = \mp \sin \theta_{ab}$$



$$\Rightarrow \left\{ \frac{(\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2)^2}{2} = \frac{1}{2} \sin^2 \theta_{ab} \right\}$$

O mesmo acontece para $S_1(\hat{a}) = +1, S_2(\hat{b}) = -1$.
Somando as 4 possibilidades, obtemos

$$\langle S_1(\hat{a}) S_2(\hat{b}) \rangle_{MQ} = \frac{1}{2} \left\{ \cos^2 \theta_{ab} - \sin^2 \theta_{ab} - \sin^2 \theta_{ab} + \cos^2 \theta_{ab} \right\}$$

$$\langle S_1(\hat{a}) S_2(\hat{b}) \rangle_{MQ} = \cos 2\theta_{ab}$$

Previsão
da MQ

Então, podemos construir o lado esquerdo da desigualdade de Bell generalizada:

$$\begin{aligned} & \langle S_1(\hat{a}) S_2(\hat{b}) \rangle_{MQ} - \langle S_1(\hat{a}) S_2(\hat{b}') \rangle_{MQ} + \langle S_1(\hat{a}') S_2(\hat{b}) \rangle_{MQ} \\ & + \langle S_1(\hat{a}') S_2(\hat{b}') \rangle_{MQ} \\ & = \cos 2\theta_{ab} - \cos 2\theta_{ab'} + \cos 2\theta_{a'b} + \cos 2\theta_{a'b'} \end{aligned}$$

Para obter uma distribuição experimental que viole a desigualdade de Bell quando a previsão da MQ acima é usada do lado esquerdo, o mais direto é obter os ângulos que maximizam essa expressão. Por exemplo, podemos fixar

$$\theta_{ab'} = \theta_{ab} + \theta_{a'b} + \theta_{a'b'}$$

substituir acima e derivar em relação a esses 3 ângulos e igualar a zero. Obtemos

$$\theta_{ab} = \theta_{a'b'} = \theta_{a'b} = 22.5^\circ$$

$$\text{e } \theta_{ab'} = 67.5^\circ$$

Substituindo, obtemos que usando a MQ nessa configuração o lado esquerdo é

$$\left\{ 2\sqrt{2} > 2 \Rightarrow \underline{\text{Viola a}} \right.$$

De fato, no experimento as folhagens não eram perfeitas, mas o resultado experimental foi

$$2.70 \pm 0.5 > 2$$

O que está de acordo com a MQ e em clara contradição com a desigualdade que deve ser respeitada por todos os teóricos com variáveis ocultas locais.