Mecânica Quântica I

Lista 8 - Momento Angular/Invariância Rotacional

1. Começando da definição do operador momento angular

$$\mathbf{L} = -i\hbar\, \mathbf{r} \times \nabla$$

   (a) Provar que

$$[L_z, x] = i\hbar y \ , \qquad [L_z, p_y] = -i\hbar p_x$$

   (b) Usando esses resultados, provar que

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

   (c) Calcule os comutadores

$$[L_z, r^2] \ , \qquad [L_z, p^2] \ ,$$

   onde $r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ e $p^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$.

   (d) Mostre que o hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + V \ ,$$

   comuta com todas as componentes de $\mathbf{L}$, sempre que V só dependa de r.

2. Considere os autoestados de L^2 e L_z, $|\lambda, m\rangle$, onde λ é o autovalor de L^2 e m é definido por

$$L_z|\lambda, m\rangle = \hbar m|\lambda, m\rangle \ .$$

   (a) Definindo

$$L_\pm = L_x \pm iL_y \ ,$$

   mostre que

$$[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm \ , \qquad [L^2, L_\pm] = 0 \ .$$

(b) Mostre que o estado definido por $L_\pm|\lambda, m\rangle$ é um autoestado de L_z com autovalor $\hbar(m \pm 1)$ ou $|\lambda, m \pm 1\rangle$ a menos de uma normalização.

(c) O máximo valor de m, ℓ, é definido por

$$L_+|\lambda, \ell\rangle = 0 \ .$$

Usando que L^2 pode ser escrito como $L^2 = L_\pm L_\mp + L_z^2 \mp \hbar L_z$, mostre que

$$\lambda = \hbar\ell(\ell + 1) \ .$$

3. Denotando agora os autoestados de L^2 e L_z como $|\ell, m\rangle$, e sabendo que $L_+|\ell, m\rangle$ é um autoestado de L_z com autovalor $\hbar(m + 1)$,

(a) Mostre que

$$L_+|\ell, m\rangle = C_+(\ell, m)\,|\ell, m + 1\rangle \ ,$$

onde o coeficiente é

$$C_+(\ell, m) = \hbar\sqrt{(\ell - m)(\ell + m + 1)} \ .$$

(b) Da mesma forma, dado

$$L_-|\ell, m\rangle = C_-(\ell, m)|\ell, m - 1\rangle \ ,$$

mostre que

$$C_-(\ell, m) = \hbar\sqrt{(\ell + m)(\ell - m + 1)} \ .$$

4. Prove que a forma mais geral de uma transformação unitária de simetria que pode ser continuamente deformada até a identidade é

$$U = e^{i\theta G} \ ,$$

onde G deve ser um operador hermitiano e θ é um parâmetro real.

5. Mostre que o operador translação $T(\mathbf{dx})$, definido para uma translação infinitesimal e que é escrito em termos do seu gerador $\mathbf{G}$ como

$$T(\mathbf{dx}) = \mathbb{1} - i\mathbf{dx} \cdot \mathbf{G} \ ,$$

é tal que o gerador satisfaz

$$[X_i, G_j] = i\delta_{ij}$$

Use esse resultado para mostrar que o gerador das translações é proporcional ao operador momento $\mathbf{P}$. Calcule a constante de proporcionalidade.

6. Mostre que se o Hamiltoniano de um sistema é invariante sob uma transformação de simetria, o seu gerador é um operador associado a uma grandeza conservada.

7. Considere uma translação *temporal*, i.e. $t \to t + \Delta t$. Mostre que o gerador da translação temporal é o Hamiltoniano. Mostre então que se o Hamiltoniano não depende *explicitamente* do tempo, a energia é conservada.

8. Considere uma rotação no plano $x - y$ por um ângulo ϕ.

   (a) Mostre que o operador de rotação $R(\phi)$ atuando num autoestado da posição no plano, $|\mathbf{x}\rangle = |x, y\rangle$, resulta num novo autoestado da posição de acordo com

   $$R(\phi)|x, y\rangle = |x\cos\phi - y\sin\phi, y\cos\phi + x\sin\phi\rangle \ .$$

   (b) Considere uma rotação infinitesimal por um ângulo ϵ. Escrevendo o operador $R(\epsilon)$ como

   $$R(\epsilon) = \mathbb{1} - i\epsilon G + O(\epsilon^2) \ ,$$

   onde G é o operador gerador da rotação, mostre que

   $$G = \frac{L_z}{\hbar} \ .$$