Mecânica Quântica I

Lista 7 - Mecânica Quântica em 3D

1. Considere um sistema descrito pela função de onda espacial
$$\psi(r,\theta,\phi) = A\, e^{-r/a} \ ,$$
onde A e a são constantes. Ache a energia E e o potencial $V(r)$ assumindo que $V(r) \to 0$ para $r \to \infty$.

2. Tal como no problema acima, ache E e $V(r)$ se agora a função de onda é dada por
$$\psi(r,\theta,\phi) = A\, e^{-r^2/a^2} \ ,$$
e o potencial é tal que $V(0) = 0$.

3. Uma partícula esta sujeita à ação do potencial
$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r \le a \\ 0, & r > a \end{cases}$$
Resolva a equação radial para $\ell = 0$ e ache o estado fundamental.

4. Mostre que
$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m (Y_\ell^m)^* \ ,$$
onde os harmónicos esféricos são definidos por
$$Y_\ell^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, e^{im\phi}\, P_\ell^m(\cos\theta) \ .$$
Use a definição em termos dos polinomios associados de Legendre
$$P_\ell^m(x) = (-1)^m \left(1-x^2\right)^{m/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^m P_\ell(x) \ ,$$
onde os polinomios de Legendre são
$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{d}{dx}\right)^\ell \left(x^2-1\right)^\ell$$

5. Mostre que os polinomios de Legendre satisfazem

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_{\ell'}(x) dx = \left(\frac{2}{2\ell + 1} \right) \delta_{\ell\ell'} \ .$$

6. Ache Y_0^0 e Y_2^1. Confira explicitamente que estão corretamente normalizados e que são ortogonais.