Mecânica Quântica I

Lista 6 - Oscilador Harmónico

1. Considere um oscilador harmónico de massas m e frequência ω. Mostre que os operadores definidos por

$$a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(X + \frac{i}{m\omega} P \right)$$

e

$$a^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(X - \frac{i}{m\omega} P \right)$$

onde X e P são os operadores posição e momento respetivamente, satisfazem

$$[a, a^\dagger] = 1.$$

2. Dado o hamiltoniano de um oscilador harmónico

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 \ ,$$

   (a) Mostre que ele pode ser rescrito como

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \ .$$

   (b) Definindo o operador $N = a^\dagger a$, mostre que os seus autovetores $\{|n\rangle\}$ são autovetores de H com autovalores

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \ ,$$

   onde n são os autovalores de N.

   (c) Mostre que

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\, |n-1\rangle \ , \qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle \ .$$

   (d) Mostre que $\forall\ n$

$$|n\rangle = \frac{\left(a^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

3. Calcule $\langle n|X^4|n\rangle$.

4. Mostre que
$$\langle 0|x^p|0\rangle = 0,$$
quando p é impar.

5. Calcule $\langle V\rangle$ e $\langle T\rangle$ para um oscilador harmónico de massa m e frequência ω no autoestado do hamiltoniano $|n\rangle$.

6. O estado inicial de uma partícula para $t = 0$ é dado por
$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \ .$$
   (a) Ache $|\psi(t)\rangle$.
   (b) Calcule $\langle X(0)\rangle = \langle\psi(0)|X|\psi(0)\rangle$, e analogamente $\langle P(0)\rangle$.
   (c) Calcule $\langle X(t)\rangle = \langle\psi(t)|X|\psi(t)\rangle$ e $\langle P(t)\rangle$

7. Mostre que no autoestado $|n\rangle$
$$\Delta X\Delta P = (n + \frac{1}{2})\,\hbar$$
onde $(\Delta X)^2 = \langle X^2\rangle_n - (\langle X\rangle_n)^2$, e analogamente para ΔP.

8. Usando a forma explicita das autofunções de onda do hamiltoniano, mostre que $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ são ortogonais.