Mecânica Quântica I

Lista 5 - Problemas Unidimensionais

1. Considere um operador Ω que não depende do tempo *explicitamente*. Mostre que a derivada total do seu valor esperado é dada por

$$\frac{d}{dt}\langle\Omega\rangle = -\frac{i}{\hbar}\langle[\Omega, H]\rangle \ .$$

   Dica: Usar que $\langle\Omega\rangle = \langle\psi|\Omega|\psi\rangle$ e a equação de Schrödinger. Esse resultado é conhecido como *Teorema de Ehrenfest*.

2. Usando o teorema de Eherenfest, mostre que uma partícula de hamiltoniano dado por $H = P^2/2m + V(x)$ obedece

$$\frac{d}{dt}\langle X\rangle = \frac{\langle P\rangle}{m}.$$

   Nota: A mecânica clássica surge como uma relação entre valores esperados de operadores.

3. Mostre que

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx/\hbar}\,\phi(p)dp$$

   onde $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ e $\phi(p) = \langle p|\psi\rangle$ são as funções de onda espacial e na base do momento respetivamente.

4. **Barreira de Potencial**: Considere uma partícula sujeita a um potencial do tipo

$$V(x) = \alpha\,\delta(x)$$

   onde α é uma constante real *positiva*.

   (a) Mostre que não existem estados ligados.

   (b) Considere o problema de espalhamento com uma partícula incidente da região $x < 0$. Calcule (ou recalcule usando os resultados do problema feito em classe) os coeficientes de reflexão e transmissão, R e T. Neste caso o T também é chamado de probabilidade de tunelamento.

5. Mostre que a derivada da função de onda espacial respeito da posição, $\psi'(x)$, num ponto $x = a$ é continua se o potencial $V(a)$ é finito.