Mecânica Quântica I

Lista 4 - Postulados - Conceitos Básicos

1. Considere um sistema descrito por um espaço de duas dimensões. Dada a base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ definida por

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; , \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ,$$

   (a) Escreva a forma mais geral de um estado $|\psi\rangle$ nessa base.

   (b) Se o hamiltoniano do sistema é dado por

$$H = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix} \; ,$$

   onde h e g são números reais, obtenha os autovalores e autoestados do H.

   (c) Se o estado do sistema é dado por

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ,$$

   e a energia é medida, quais são os possíveis resultados e suas probabilidades ?

2. Considere os seguintes operadores no espaço de Hilbert $\mathbb{V}^3(\mathbb{C})$:

$$L_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; , \quad L_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \; , \quad L_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; ,$$

   (a) Quais são os possíveis valores de L_z que podemos obter de uma medição ?

   (b) Considere o estado com $L_z = 1$. Neste estado calcule $\langle L_x \rangle$, $\langle L_x^2 \rangle$ e $\Delta L_x = \sqrt{\langle L_x^2 \rangle - \langle L_x \rangle^2}$.

   (c) Ache os autovalores e autovetores (normalizados) de L_x na base de L_z.

   (d) Se uma partícula está no estado com $L_z = -1$ e L_x é medido, quais são os possíveis resultados da medição e suas probabilidades ?

   (e) Dado o estado

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \; ,$$

   escrito na base L_z, se $\langle L_z^2 \rangle$ é medido com o resultado $+1$ qual o estado do sistema após da medição ? Qual a probabilidade desse resultado ? Se L_z é medido quais os possíveis resultados e suas respetivas probabilidades ?

3. Dado um estado $|\psi\rangle$, calcule

   (a)
   $$\langle x|X|\psi\rangle$$

   (b)
   $$\langle x|P|\psi\rangle$$

   onde X e P são os operadores posição e momento, e $|x\rangle$ é base de autoestados de X.

4. Dado o hamiltoniano
   $$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ,$$
   e os operadores
   $$A = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} , \quad B = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

   (a) Ache os autovalores e autovetores (normalizados) dos operadores H, A e B.

   (b) Se o sistema está num estado genérico normalizado dado por
   $$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} ,$$
   ache as probabilidades de uma medição dos observáveis H, A e B resultar em cada um dos seus autovalores. Ache os valores esperados desses observáveis.

5. Mostre que a incerteza de um observável Ω definida por
   $$\Delta\Omega = \sqrt{\langle \Omega^2 \rangle - \langle \Omega \rangle^2} ,$$
   é nula quando o sistema está num autoestado do Ω.

6. Utilizando a equação de Schrödinger, prove que a evolução temporal de um estado pode ser escrita como
   $$|\psi(t)\rangle = \sum_E a_E(t)\, |E\rangle$$
   onde $|E\rangle$ são os autoestados do hamiltoniano, e $a_E(t) = \langle E|\psi(t)\rangle$ são dados por
   $$a_E(t) = a_E(0)\, e^{-iEt/\hbar} .$$

7. Prove que o operador evolução $U(t)$ definido por

$$|\psi(t)\rangle \equiv U(t)\,|\psi(0)\rangle$$

é dado por

$$U(t) = \sum_E |E\rangle\langle E|\, e^{-iEt/\hbar} \ .$$

8. Mostre que uma expressão alternativa para o operador evolução é

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} \ ,$$

onde H é o operador hamiltoniano.

9. Se o sistema do Problema 1 está em $|\psi\rangle$ para $t = 0$, i.e. se

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

mostre que para um tempo posterior t temos

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iht/\hbar} \begin{pmatrix} \cos(gt/\hbar) \\ -i\sin(gt/\hbar) \end{pmatrix} \ .$$