Mecânica Quântica I

Lista 2 - Ferramentas Matemáticas

1. Mostre que o seguintes vetores são linearmente dependentes:
$$(1,1,0),(1,0,1),(3,2,1)\ .$$
Mostre que esses outros
$$(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)$$
são linearmente *independentes*.

2. A partir da base
$$|I\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |II\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad |III\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$
utilize o método de Gram-Schmidt para achar uma base ortonormal.

3. Provar a desigualde triangular
$$|V+W| \leq |V| + |W|\ .$$
Use a desigualdade de Schwarz e que
$$\mathrm{Re}[\langle V|W\rangle] \leq |\langle V|W\rangle|\ .$$

4. Dados os operadores lineares Ω, Λ e Θ, provar que
$$[\Omega, \Lambda\Theta] = \Lambda[\Omega, \Theta] + [\Omega, \Lambda]\Theta$$
e que
$$[\Lambda\Omega, \Theta] = \Lambda[\Omega, \Theta] + [\Lambda, \Theta]\Omega\ .$$

5. Provar que
$$(\Omega\Lambda)^{-1} = \Lambda^{-1}\Omega^{-1}\ .$$

6. Considere a base ortonormal de versores em três dimensões: $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$.
   (a) Obtenha a ação do operador rotação aredor do eixo y, $R(\pi/2\,\hat{j})$, em cada um dos elementos da base.
   (b) Escreva a matrix correspondente ao operador $R(\pi/2\,\hat{j})$ na base dada.

7. Dado um operador Ω atuando num ket $|V\rangle$ de acordo com $\Omega|V\rangle = |V'\rangle$, seu operador adjunto $\Omega^\dagger$ é definido pela relação

$$\langle V'| = \langle V|\Omega^\dagger \ .$$

Provar que a sua representação como matriz numa base dada $\{|i\rangle\}$ é

$$\left(\Omega^\dagger\right)_{ij} = \Omega^*_{ji} \ .$$

8. Provar que o adjunto de um produto de dois operadores Ω e Λ é dado por

$$(\Omega\Lambda)^\dagger = \Lambda^\dagger\Omega^\dagger$$

9. Mostrar que o produto de dois operadores unitários U e V é um operador unitário.

10. Mostrar que as colunas de uma matriz representando um operador unitário U formam uma base ortonormal de vetores. Para isso, começar da identidade

$$\delta_{ij} = \langle i|I|j\rangle = \langle i|U^\dagger U|j\rangle = \sum_k \langle i|U^\dagger|k\rangle\langle k|U|j\rangle \ .$$

O mesmo pode ser mostrado para as fileiras.

11. O traço de uma matriz Ω é definido como

$$\mathrm{Tr}[\Omega] = \sum_{\mathrm{i}} \Omega_{\mathrm{ii}} \ .$$

Mostre que

(a) $\mathrm{Tr}[\Omega\Lambda] = \mathrm{Tr}[\Lambda\Omega]$

(b) $\mathrm{Tr}[\Omega\Lambda\Theta] = \mathrm{Tr}[\Lambda\Theta\Omega] = \mathrm{Tr}[\Theta\Omega\Lambda]$

(c) O traço de um operador é invariante sob uma transformação unitária.

12. Considere a matriz

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

(a) Verifique se ela é hermitiana.

(b) Ache seus autovalores e autovetores.

(c) Dada a matriz U construida com os autovetores de Ω, verifique que $U^\dagger\Omega U$ é diagonal.

13. Mostre que o determinante de uma matrix representando um operador Ω é invariante sob uma transformação unitária da base.

14. Considere a matriz

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que ela é unitária.

   (b) Mostre que seus autovalores são $e^{i\theta}$ e $e^{-i\theta}$.

   (c) Ache os seus autovetores, e mostre que são ortogonais.

   (d) Verifique que $U^\dagger \Omega U$ é diagonal, onde U é a matriz formada pelos autovetores de Ω.

15. Mostre que o determinante de uma matrix hermitiana ou unitária Ω pode ser escrito como

$$\det(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} \omega_i \ ,$$

onde os ω_i's são os autovalores de Ω.