

Mecânica Quântica I

Lista 13 - Partículas Idênticas

1. Considere um sistema de duas partículas idênticas, onde a função de onda espacial do sistema é dada por

$$\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \phi_a(\mathbf{r}_1)\phi_b(\mathbf{r}_2) \pm \phi_b(\mathbf{r}_1)\phi_a(\mathbf{r}_2) \} ,$$

onde $\phi_a(\mathbf{r})$ e $\phi_b(\mathbf{r})$ correspondem a estados de uma partícula, e constituem uma base ortonormal, portanto satisfazem

$$\int |\phi_a(\mathbf{r})|^2 d^3r = 1 \quad \int |\phi_b(\mathbf{r})|^2 d^3r = 1 \quad \int \phi_a^*(\mathbf{r})\phi_b(\mathbf{r}) d^3r = 0 .$$

- (a) Calcule $\langle r_1^2 \rangle$ e $\langle r_2^2 \rangle$, onde o valor esperado está definido pela probabilidade cuja amplitude é $\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Mostre que

$$\langle r_1^2 \rangle = \langle r_2^2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle r^2 \rangle_a + \langle r^2 \rangle_b) ,$$

onde

$$\langle r^2 \rangle_a = \int r^2 |\phi_a(\mathbf{r})|^2 d^3r ,$$

e analogamente para $a \rightarrow b$.

- (b) Calcule $\langle r_1 r_2 \rangle$. Mostre que é dado por

$$\langle r_1 r_2 \rangle = \langle r \rangle_a \langle r \rangle_b \pm |\langle r \rangle_{ab}|^2 ,$$

onde

$$\langle r \rangle_{ab} = \int r \phi_a^*(\mathbf{r}) \phi_b(\mathbf{r}) d^3r .$$

- (c) Calcule $\langle (\Delta r)^2 \rangle = \langle (r_1 - r_2)^2 \rangle = \langle r_1^2 \rangle + \langle r_2^2 \rangle - 2\langle r_1 r_2 \rangle$. Mostre que no caso de dois férmions de spin $1/2$, se eles estão num estado de spin total $s = 1$ eles tem um valor de $\langle (\Delta r)^2 \rangle$ maior que no caso em que estão no estado $s = 0$.

- (d) A partir do resultado acima discuta as circunstâncias nas quais a simetria do estado das duas partículas é *irrelevante*. Em particular, em que circunstâncias temos $\langle r \rangle_{ab} = 0$?

2. Considere o átomo de Hélio.

- (a) Desprezando a interação entre os elétrons, escreva a forma mais geral da função de onda.
- (b) Obtenha a função de onda de spin no *estado fundamental*.
- (c) Calcule a energia do estado fundamental nessa aproximação (elétrons não interagentes).
- (d) Discuta o *sinal* da correção à energia do estado fundamental quando as interações entre elétrons são consideradas.
- (e) Considere um *estado excitado*. Discuta as possíveis configurações da função de onda de spin dos elétrons. Considerando os efeitos das interações entre elétrons, qual dessas configurações tem a menor energia ?

3. **Tabela Periódica:** Utilizando a notação $(n\ell)^{n_e}$, onde n é o nível de energia (orbital); ℓ é o valor do momento angular de acordo com a convenção s para $\ell = 0$, p para $\ell = 1$, etc.; e n_e é o número de elétrons, descreva os primeiros 10 elementos da tabela periódica dos elementos.