

Mecânica Quântica I

Lista 12 - Adição de Momento Angular

1. Considere um sistema de duas partículas de spin $1/2$. Partindo da base ortonormal de autoestados de S_1^2 , S_2^2 , S_{1Z} e S_{2Z} dada por

$$\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$$

- (a) Obtenha a representação matricial do operador S^2 na base acima, onde $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$.
- (b) Obtenha os estados do sistema com $s = 1$. Para isso primeiro identifique um estado da base acima com $s = 1$, explicando a sua escolha. Obtenha os outros estados, corretamente normalizados a partir desse.
- (c) Obtenha o autoestado de $s = 0$ a partir do resultado anterior.

2. Um sistema de duas partículas tem momentos angulares \mathbf{J}_1 e \mathbf{J}_2 .

- (a) Mostre que a base de autoestados de J^2 , J_z , J_1^2 e J_2^2 , $\{|j, m\rangle\}$, pode ser obtida como uma combinação linear dos autoestados de J_1^2 , J_2^2 , J_{1Z} e J_{2Z} através da expressão

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m \rangle .$$

- (b) Mostre que os coeficientes da transformação acima (os Clebsch-Gordan) devem satisfazer que

$$\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m \rangle = 0 ,$$

se $m - m_1 - m_2 \neq 0$.

- (c) Começando do estado de máximos valores de m_1 e m_2 e sabendo que

$$j_1 - j_2 \leq j \leq j_1 + j_2 ,$$

ache o estado da base $|j, m\rangle$ que satisfaz

$$J_+ |j, m\rangle = 0 .$$

(d) Mostre que o estado da base $|j, m\rangle$ abaixo pode ser expandido da forma

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle = c_1 |j_1, j_1 - 1; j_2, j_2\rangle + c_2 |j_1, j_1; j_2, j_2 - 1\rangle ,$$

Calcule os coeficientes c_1 e c_2 . Escreva eles como coeficientes de Clebsch-Gordan.

(e) Considere o estado da base soma $|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle$. Obtenha a sua expansão normalizada na base produto $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$, incluindo os coeficientes. **Dica:** Use o fato que esse estado deve ser ortogonal ao estado $|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle$ considerado no ponto anterior.

3. Considere uma partícula de spin $1/2$ com momento angular orbital \mathbf{L} .

- (a) Descreva em detalhe a base soma $|j, m\rangle$, onde $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ é o momento angular total.
- (b) Escreva a expansão dos elementos da base soma em termos da base produto $|\ell, m_\ell; 1/2, m_s\rangle$. Usando a ortonormalidade das bases como vínculo ache os coeficientes da expansão.