

Mecânica Quântica I

Lista 11 - Dinâmica do Spin

1. Considere uma partícula de spin $1/2$ sujeita a um campo magnético $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$.
 - (a) Escreva o hamiltoniano do sistema que acopla o spin ao campo magnético. Obtenha os seus autovalores.
 - (b) Se o estado inicial a $t = 0$ é descrito pelo espinor

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

onde a e b são constantes, obtenha $\chi(t)$.

- (c) Se no tempo t medimos o observável S_x , calcule a probabilidade de obter $+\hbar/2$. Repita para o caso de medir S_y e S_z .
 - (d) Calcule os valores esperados $\langle S_x \rangle_{(t)}$, $\langle S_y \rangle_{(t)}$ e $\langle S_z \rangle_{(t)}$.
2. **Experimento de Stern-Gerlach:** Considere um feixe de partículas de spin $1/2$ focado na direção \hat{y} . Elas são sujeitas a um campo magnético com duas componentes, uma homogênea e outra não-homogênea:

$$\mathbf{B}(x, y, z) = -\alpha x \hat{x} + (B_0 + \alpha z) \hat{z}$$

onde α é uma constante. Dado que o hamiltoniano da interação é

$$H_{\text{int.}} = -\mu_s \cdot \mathbf{B},$$

onde μ_s é o momento magnético de spin das partículas do feixe.

- (a) Calcule a força exercida pelo campo magnético no feixe.
 - (b) Mostre que a componente da força na direção \hat{x} tem uma média nula. (**Dica:** Precessão de spin!)
3. Considere um elétron em repouso em presença de um campo magnético dependente do tempo dado por

$$\mathbf{B} = B_0 \cos \omega t \hat{z},$$

onde B_0 e ω são constantes dadas.

- (a) Obtenha o hamiltoniano do sistema.
- (b) Se para $t = 0$ o elétron se encontra no estado de spin $+\hbar/2$ na direção \hat{x} , determine seu estado para um tempo posterior t , i.e. determine $\chi(t)$, sendo que $\chi(0) = \chi_+^{(x)}$.

Dica: O hamiltoniano **depende explicitamente do tempo!** Portanto, não é possível assumir a existência de estados estacionários e devemos resolver a equação de Schrödinger diretamente:

$$i\hbar \frac{\partial \chi(t)}{\partial t} = H\chi(t) ,$$

onde

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

e $a(0) = b(0) = 1/\sqrt{2}$.

- (c) Calcule a probabilidade para obter $-\hbar/2$ se medimos S_x em um tempo $t > 0$.
- (d) Calcule o mínimo valor de B_0 para o qual a probabilidade acima é 1.