Mecânica Quântica I

Lista 10 - Spin

1. Considere as matrices de rotações clássicas

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \qquad R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

e

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

correspondentes a rotações aredor os eixos $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ respetivamente.

   (a) Mostre que

$$R_x(\epsilon)R_y(\epsilon) - R_y(\epsilon)R_x(\epsilon) = R_z(\epsilon^2) - \mathbb{1} ,$$

   onde ϵ é um ângulo infinitesimal.

   (b) Mostre que se os operadores associados a rotações em mecânica quântica, escritos como

$$R_i = e^{-i/\hbar J_i \phi} ,$$

   em termos dos geradores J_i, $i = x, y, z$, satisfazem a expression demonstrada no ponto anterior, então os geradores satisfazem

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z .$$

2. Uma partícula de spin 1/2 está no estado de espinor

$$\chi = A \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix} .$$

   (a) Calcule a constante de normalização A.

   (b) Ache os valores esperados de S_x, S_y e S_z.

3. Considere um espinor dado por

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \ ,$$

onde χ_+ e χ_- são espinores representando autoestados do operador S_z. No estado χ calcule $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$, $\langle S_z \rangle$, $\langle S_x^2 \rangle$, $\langle S_y^2 \rangle$ e $\langle S_z^2 \rangle$. Verifique que

$$\langle S^2 \rangle = \langle S_x^2 \rangle + \langle S_y^2 \rangle + \langle S_z^2 \rangle \ .$$

4. Considere o operador S_y.

   (a) Ache os seus autovalores e autoespinores.

   (b) Se S_y é medido num estado geral χ tal como definido no problema anterior, quais os possíveis resultados e suas probabilidades ?

   (c) Se S_y^2 é medido no estado χ, quais os possíveis resultados e suas respetivas probabilidades ?

5. Considere a base de autoestados do operador S_z, $\{|\pm\rangle\}$, tal que

$$S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}\,|\pm\rangle \ .$$

   (a) Usando essa base mostre que uma rotação por um ângulo ϕ em $\hat{z}$ atuando no operador S_y resulta em

$$S_y \to S_y \cos\phi + S_x \sin\phi \ .$$

   (b) Considere um estado de spin 1/2 qualquer $|\chi\rangle$. Mostre que uma rotação em $\hat{z}$ por um ângulo de 2π resulta em

$$|\chi\rangle \to (-1)|\chi\rangle \ .$$

   Qual o ângulo de rotação necessário para obter novamente $|\chi\rangle$?

6. Considere as matrices de Pauli σ_i com $i = 1, 2, 3$.

   (a) Mostre que para qualquer par de vetores **A** e **B** elas satisfazem

   $$(\sigma \cdot \mathbf{A})\,(\sigma \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\sigma \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \ ,$$

   onde $\sigma = \sigma_1 \hat{x} + \sigma_2 \hat{y} + \sigma_3 \hat{z}$.

   (b) Use esse resultado para provar que o operador rotação por um ângulo ϕ aredor de um eixo arbitrário $\hat{n}$ pode ser expressado como

   $$e^{-(i/\hbar)\mathbf{S}\cdot\hat{n}\phi} = \mathbb{1} \cos\phi/2 - i\sigma \cdot \hat{n} \sin\phi/2 \ .$$