Mecânica Quântica I

Lista 1

1. O operador Hamiltoniano de uma partícula num potencial é dado por

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x}) \ .$$

Mostre explicitamente que ele é um operador hermitiano, i.e. ele satisfaz

$$\int d^3x f^*(\mathbf{x},t)\hat{H}g(\mathbf{x},t) = \int d^3x (\hat{H}f(\mathbf{x},t))^* g(\mathbf{x},t) \ ,$$

onde f e g são funções arbitrárias.

2. Mostre que o fato que o Hamiltoniano é hermitiano é uma condição necessária para a conservação da probabilidade total do sistema descrito pela função de onda $\psi(\mathbf{x},t)$, e satisfazendo

$$\int d^3x |\psi(\mathbf{x},t)|^2 = 1 \ .$$

Para isso você precisará fazer uso da equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(\mathbf{x},t) \ .$$

3. Derive a equação de continuidade da probabilidade, versão diferencial da conservação da probabilidade total. Ela é dada por

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x},t) \ ,$$

onde $\rho(\mathbf{x},t) = |\psi(\mathbf{x},t)|^2$ é a densidade de probabilidade, e a densidade de corrente de probabilidade é definida como

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t) = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(\mathbf{x},t)\,\nabla\psi(\mathbf{x},t) - \psi(\mathbf{x},t)\,\nabla\psi^*(\mathbf{x},t)\right] \ .$$