Aula 3 Ferramentas Matemáticas da MQ

Espaços Vetoriais (Lineares)

Um espaço vetorial linear é um conjunto de vetores $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots V_n\}$ com regra de adição bem definida e com um conjunto de escalares $\{a, b, \ldots\}$ que podem multiplicar eles.

Antes de proceder, vamos mudar a notação: em lugar de usar $\vec{V}$, vamos usar

$$\vec{V} \longrightarrow |V\rangle \quad (\text{ket})$$

A razão da mudança é nos livrar da relação da definição dos vetores com o espaço. Nossos vetores são uma generalização dos vetores que normalmente usamos em 3D.

$$\Rightarrow \{|V_1\rangle, |V_2\rangle, \ldots |V_n\rangle, \ldots\} \in \mathbb{V}$$

As propriedades de soma e multiplicação por escalares são as óbvias.

- $|v\rangle + |w\rangle \in V$

- $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$

- $(a+b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$

- Inverso sob adição

$$|v\rangle + |-v\rangle = |0\rangle$$

onde

- $|0\rangle$ é definido como o elemento neutro sob adição, i.e.

$$|v\rangle + |0\rangle = |v\rangle$$

- Comutatividade da adição

$$|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$$

- Associatividade da adição

$$|v\rangle + (|w\rangle + |z\rangle) = (|v\rangle + |w\rangle) + |z\rangle$$

- Associatividade da multiplicação

$$a(b|v\rangle) = ab|v\rangle$$

. Se os escalares são números reais

$\Rightarrow$ Espaço vetorial real

. Se são complexos: espaço vetorial complexo

Exemplos

1. Vetores em 3D com números reais.

ES ~~é~~ é um espaço vetorial real

. Tem todas as propriedades acima

2. Matrizes de 2x2

Podemos que eles são um espaço vetorial:

. Multiplicação por escalares

$$a\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} am_{11} & am_{12} \\ am_{21} & am_{22} \end{pmatrix}$$

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{etc}$$

Exemplo 3

. Funções $f(x)$ num intervalo $0 \leq x \leq L$

. Exercício

Dependência e Independência Linear

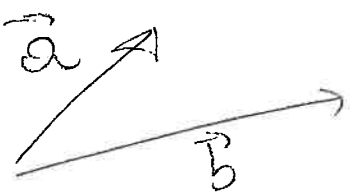
Um conjunto de kets é linearmente independente se eles satisfazem [illegible] a relação linear

$$\sum_{i=1}^{m} a_i |i\rangle = |0\rangle$$

só tem solução para $a_i = 0 \ \forall i$.

Pelo contrário, o conjunto $\{|1\rangle, \dots |i\rangle \dots |m\rangle\}$ é linearmente dependente se existe uma solução com a_i's $\neq 0$.

Exemplo 1



$\vec{a}, \vec{b}$ são linearmente independentes

i.e. $\quad a\vec{a} + b\vec{b} = 0$

$\Rightarrow \quad \vec{a} = -\frac{b}{a}\vec{b}$ não tem solução para vetores não nulos

Exemplo 2

5

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Eles são linearmente independentes?

$$a|1\rangle + b|2\rangle + c|3\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad b - 2c = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2c}$$

$$a + b - c = 0$$

$$\Rightarrow \quad a + c = 0 \Rightarrow \boxed{a = -c}$$

MAS sempre fica um valor indeterminado

$$\Rightarrow \quad -c|1\rangle + 2c|2\rangle + c|3\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad -|1\rangle + 2|2\rangle + |3\rangle = 0$$

ou $\boxed{|1\rangle = 2|2\rangle + |3\rangle}$

$\Rightarrow$ NÃO SÃO l. independentes.

Expansão em relação a uma Base

. A dimensão de um espaço vetorial é o máximo número de vetores linearmente independentes

⇒ ie o máximo nº de v_i é n

⇒ $\mathbb{V}^n$

Exemplo: O conjunto de matrizes de 2x2

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad |4\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é linearmente independente (provar!). Um quinto elemento sempre pode ser escrito como uma combinação linear deles,

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a|1\rangle + b|2\rangle + c|3\rangle + d|4\rangle$$

para quaisquer valores (reais ou complexos) de a, b, c e d

⇒ Matrizes de 2x2 formam um espaço vetorial de dimensão 4

- Em geral, qualquer vetor $|V\rangle \in \mathbb{V}^n$ pode ser escrito como uma combinação linear de $\underline{n}$ vetores l. independentes

$$\{|1\rangle, \ldots, |n\rangle\}$$

Um conjunto de n vetores linearmente independentes pertencendo a um espaço vetorial n dimensional é chamado de base em $\mathbb{V}^n$.

Então qualquer vetor $|V\rangle$ pode ser escrito como uma combinação linear de vetores da base

$$\{|1\rangle, \ldots, |n\rangle\}$$

$$|V\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i |i\rangle$$

onde os c_i's são os componentes do vetor $|V\rangle$ nessa base. Eles podem ser reais ou complexos dependendo de se $\mathbb{V}^n(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{V}^n(\mathbb{C})$.

As componentes de $|V\rangle$ nessa base, $\{c_i\}$, são únicas.

Produto Interno

Definimos o produto interno de 2 vetores $|V\rangle$ e $|W\rangle$ como

$$\boxed{\langle V|W\rangle}$$

Com as propriedades:

- $\langle V|W\rangle = \langle W|V\rangle^*$

  O P.i. é um número, em geral complexo.

  A inversão da ordem dos fatores é equivalente à tomar o complexo conjugado

- $\langle V|V\rangle \geq 0$ (é $=0$ só se $|V\rangle = |0\rangle$)

  $\Rightarrow$ A norma^2 de um vetor $|V\rangle$ é semi-definida positiva

$$\langle V|V\rangle \equiv |V|^2$$

Norma $\doteq |V| = \sqrt{\langle V|V\rangle}$

- $\langle V | (a|W\rangle + b|Z\rangle)$

$$= a\langle V|W\rangle + b\langle V|Z\rangle$$

- Entanto que:

$$\langle aW + bZ|V\rangle = \langle V|aW + bZ\rangle^*$$
$$= a^*\langle V|W\rangle^* + b^*\langle V|Z\rangle^*$$
$$= a^*\langle W|V\rangle + b^*\langle Z|V\rangle$$

- Dois vetores são ortogonais se

$$\langle V|W\rangle = 0$$

Base Ortonormal

É uma base de vetores ortogonais entre eles e de norma igual a 1.

i.e. $\{|1\rangle, \dots |n\rangle\}$ base ~~ortonormal~~

se

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} \longrightarrow$$

Kronecker delta

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

Dados dois vetores $|V\rangle$ e $|W\rangle$, tal que

$$|V\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i |i\rangle$$

, onde $\{|i\rangle\}$ é uma base ortonormal

$$|W\rangle = \sum_{j=1}^{n} w_i |j\rangle$$

O produto interno é:

$$\langle V|W\rangle = \sum_i \sum_j v_i^* w_j \langle i|j\rangle = \sum_i \sum_j v_i^* w_j \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle V|W\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i^* w_i}$$

← similar ao caso do produto escalar de vetores mas com v_i^*!

Aqui vemos porque então a norma^2 é semi-definida positiva i.e:

$$\langle V|V\rangle = \sum_i |v_i|^2 \geqslant 0$$

e é nula só se todos os componentes v_i são zero.

Notação de Dirac:

Vetor ou Ket $|v\rangle$ numa base dada pode ser escrito como vetor coluna ou matriz de $m \times 1$

$$|v\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

Mas como obter a regra do produto interno dessa forma?

Queremos

$$\langle v|w\rangle = \sum_i v_i^* w_i$$

Para isso definimos o bra $\langle v|$ dado pelo vetor linha (ou matriz de $1 \times m$)

$$\langle v| \leftrightarrow (v_1^* \; v_2^* \ldots v_m^*)$$

Isto quer dizer que o bra $\langle v|$ é o adjunto do Ket $|v\rangle$.

Adjunto: Vetor representado pela matriz transposta e com os elementos complexo-conjugados i.e

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}^{\dagger} = (v_1^* \; v_2^* \; \ldots \; v_m^*)$$

adjunto

$$\Rightarrow \langle v|w\rangle = (v_1^* \; v_2^* \ldots v_m^*) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} v_i^* w_i \quad \checkmark$$

O espaço vetorial definido pelos <u>bras</u> é chamado de <u>espaço dual</u>.

Em termos da expansão numa base ortonormal

$$\{|i\rangle\}$$

temos

$$|v\rangle = \sum_i v_i |i\rangle \qquad \underline{\text{ket}}$$

então o <u>bra</u> é o adjunto, dado por

$$\langle v| = \sum_i \langle i| v_i^*$$

onde os bras $\{\langle i|\}$ formam a <u>base ortonormal dual</u>.

Componentes na base ortonormal $\{|i\rangle\}$ 13

$$|V\rangle = \sum_i v_i |i\rangle$$

multiplicando pelo <u>bra</u> $\langle j|$ da base ortonormal dual temos

$$\langle j|V\rangle = \sum_i v_i \langle j|i\rangle = \sum_i v_i \delta_{ji}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle j|V\rangle = v_j}$$

$\Rightarrow$ A componente j do vetor $|V\rangle$ é a "projeção" de $|V\rangle$ na "direção" $\langle j|$!

Obviamente (provar!)

$$\langle V|j\rangle = v_j^*$$

Portanto, podemos escrever

$$|V\rangle = \sum_i v_i |i\rangle = \sum_i \langle i|V\rangle |i\rangle$$

o que pode ser reescrito como

$$\boxed{|V\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|V\rangle}$$

Esse é um primeiro exemplo da inserção do operador identidade:

$$\boxed{\mathbb{I} \equiv \sum_i |i\rangle\langle i|}$$

onde a soma é em ~~todos~~ os elementos da base ortonormal

↳ relação de completeza (mais detalhes depois)

Método de Gram-Schmidt

$$\left\{ \text{conjunto de vetores linearmente independentes} \right\} \xrightarrow{GS} \left\{ \text{base ortonormal} \right\}$$

Começamos com um espaço de dimensão n e um conjunto de vetores linearmente independente

$$\{ |I\rangle, |II\rangle, \dots \}$$

Definimos:

$$|1\rangle \equiv \frac{|I\rangle}{|I|}$$

onde a norma é $|I| = \sqrt{\langle I|I\rangle}$

com essa definição, claramente vemos que

$$\langle 1|1\rangle = \frac{\langle I|I\rangle}{|I|^2} = 1 \Rightarrow \text{norma é } 1 \checkmark$$

O próximo passo é definir um vetor que seja ortogonal a $|1\rangle$. Definimos

$$|2'\rangle \equiv |II\rangle - |1\rangle\langle 1|II\rangle$$

onde usamos arbitrariamente o vetor $|II\rangle$.

Esse vetor claramente ~~satisfaz~~

$$\langle 1|2'\rangle = \langle 1|II\rangle - \underbrace{\langle 1|1\rangle}_{=1}\langle 1|II\rangle$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ $|2'\rangle$ é ortogonal a $|1\rangle$ ✓

O próximo passo é normalizá-lo para obter

$$|2\rangle \equiv \frac{|2'\rangle}{|2'|} \quad \text{tal que} \quad \langle 2|2\rangle = 1$$

O procedimento continua com

$$|3'\rangle \equiv |III\rangle - |1\rangle\langle 1|III\rangle - |2\rangle\langle 2|III\rangle$$

e depois normalizá-lo para obter $|3\rangle = \dfrac{|3'\rangle}{|3'|}$

etc.

Notar que o que estamos fazendo é, começando com um conjunto de vetores lin. indep., subtrair de cada um deles a projeção na direção dos vetores da base ortonormal já obtidos, com exceção do $|1\rangle$ que é simplesmente uma normalização de qualquer vetor.

Desigualdade de Schwarz

Teorema

$$|\langle V|W\rangle| \leq |V|\,|W|$$

Prova:

Definimos o seguinte vetor

$$|Z\rangle \equiv |V\rangle - \frac{\langle W|V\rangle}{|W|^2}|W\rangle$$

Sua norma é

$$\langle Z|Z\rangle = \left\langle V - \frac{\langle W|V\rangle}{|W|^2} W \middle| V - \frac{\langle W|V\rangle}{|W|^2} W \right\rangle$$

$$= \langle V|V\rangle - \frac{\langle W|V\rangle\langle V|W\rangle}{|W|^2} - \frac{\langle W|V\rangle^*}{|W|^2}\langle W|V\rangle$$

$$+ \frac{\langle W|V\rangle^*\langle W|V\rangle}{|W|^4}\langle W|W\rangle$$

Por outra parte, sabemos que, em geral

$$\langle z|z\rangle \geq 0$$

usando que

$$\langle w|v\rangle^* = \langle v|w\rangle$$

e que

$$\langle w|w\rangle = |w|^2$$

obtemos

$$\langle v|v\rangle - \frac{\langle w|v\rangle\langle v|w\rangle}{|w|^2} - \frac{\langle v|w\rangle\langle w|v\rangle}{|w|^2}$$

$$+ \frac{\langle v|w\rangle\langle w|v\rangle}{|w|^2} \geq 0$$

ou

$$\langle v|v\rangle - \frac{\langle v|w\rangle^*\langle v|w\rangle}{\langle w|w\rangle} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad |\langle v|w\rangle|^2 \leq |v|^2\,|w|^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{|\langle v|w\rangle| \leq |v|\,|w|}$$

qed

Desigualdade Triangular ('Provar em lista')

$$\boxed{|V+W| \leq |V|+|W|}$$

Subespaços:

Dado um espaço vetorial V^m, um subconjunto dos seus elementos que formam um espaço vetorial entre eles é chamado de subespaço.
A dimensão do subespaço é $m_i \leq m$.

Dados dois subespaços $V_i^{m_i}$ e $V_j^{m_j}$
podemos definir a sua soma

$$V_i^{m_i} \oplus V_j^{m_j} = V_k^{m_k}$$

como o conjunto contendo

- todos os elementos de $V_i^{m_i}$
- " " " de $V_j^{m_j}$
- todas as combinações lineares possíveis entre eles.

Operadores Lineares

Um operador $\underline{\underline{\Omega}}$ transforma um vetor $|V\rangle$ em outro elemento $|V'\rangle$ do espaço vetorial

$$\Omega |V\rangle = |V'\rangle$$

atuando no ket

Atuando no bra:

$$\langle V| \Omega = \langle V'|$$

Propriedades de operadores lineares

- $\Omega \alpha |V_i\rangle = \alpha \Omega |V_i\rangle$

α escalar real ou complexo

- $\Omega (\alpha |V_i\rangle + \beta |V_j\rangle) = \alpha \Omega |V_i\rangle + \beta \Omega |V_j\rangle$

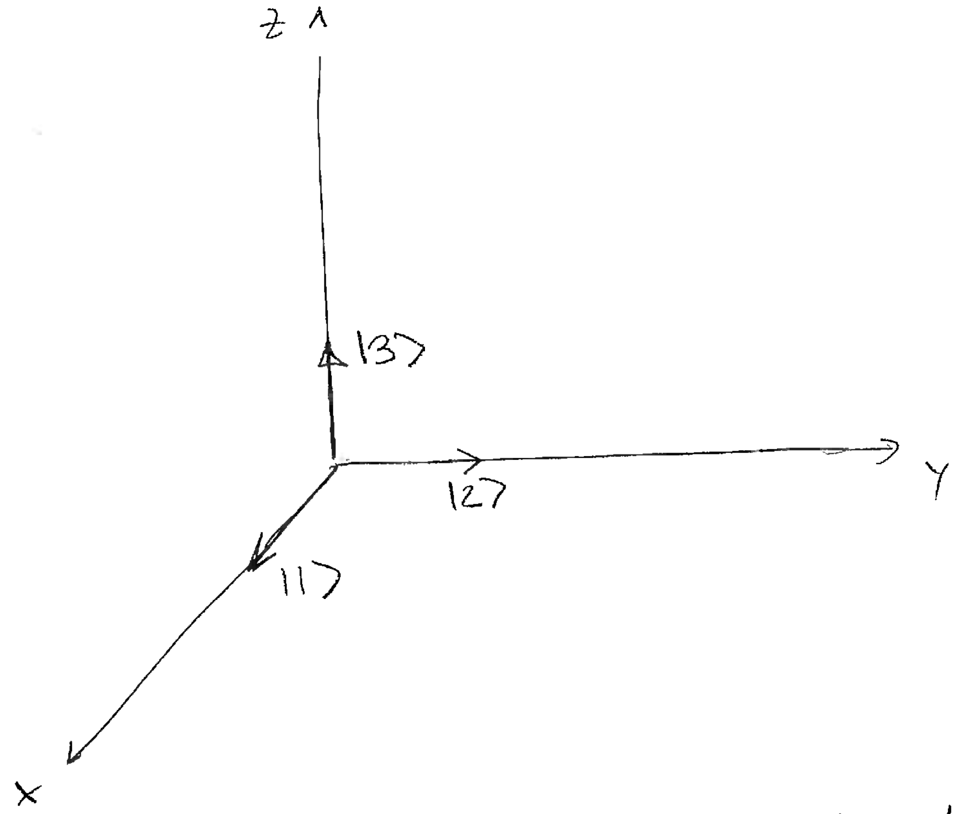
e analogamente para os correspondentes bras.

Exemplo: o operador identidade é um operador linear

$$I |V\rangle = |V\rangle$$

Exemplo: Rotações de 90°

Consideremos a base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ ortonormal no espaço de vetores em 3D



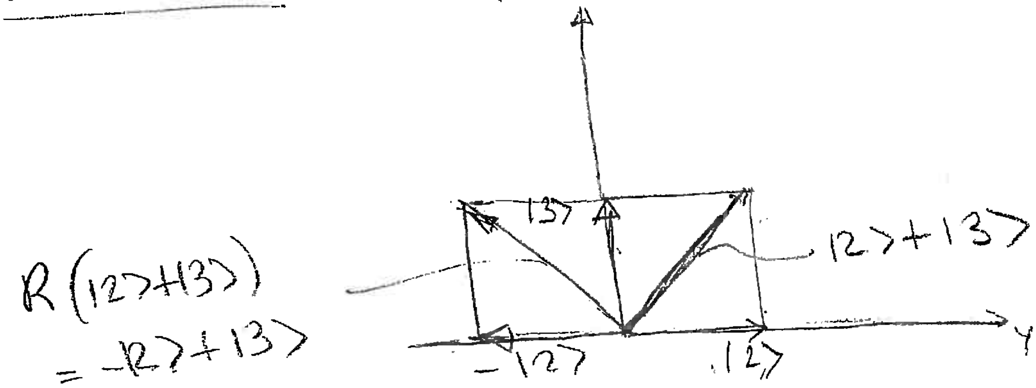
em geral $R(\vec{\theta})$ é um operador que, aplicado a um vetor rota éle pelo "ângulo" $\vec{\theta}$.

Ex: $R(\frac{\pi}{2}\hat{\imath})$ é uma rotação de 90° aredor do eixo X.

então temos que

$$\begin{cases} R(\frac{\pi}{2}\hat{\imath})|1\rangle = |1\rangle \\ R(\frac{\pi}{2}\hat{\imath})|2\rangle = |3\rangle \\ R(\frac{\pi}{2}\hat{\imath})|3\rangle = -|2\rangle \end{cases}$$

É linear: exemplo



Então, dada a ação de um operador linear nos elementos da base ortonormal, teremos a ação dele em todos os elementos do espaço vetorial.

No exemplo anterior, dado um vetor de componentes $\{v_i\}$

$$|V\rangle = v_1|1\rangle + v_2|2\rangle + v_3|3\rangle$$

$$R|V\rangle = v_1 R|1\rangle + v_2 R|2\rangle + v_3 R|3\rangle$$

$$= v_1|1\rangle + v_2|3\rangle - v_3|2\rangle$$

Em geral, dada a ação de Ω nos elementos de uma base ortonormal $\{|i\rangle\}$, tal como

$$\Omega|i\rangle = |i'\rangle$$

então

$$\Omega|V\rangle = \Omega\sum_i v_i|i\rangle = \sum_i v_i\,\Omega|i\rangle$$

$$\Omega|V\rangle = \sum_i v_i|i'\rangle$$

Produto de dois Operadores lineares

Aplicação sucesiva dos operações

$$\Lambda\Omega|V\rangle = \Lambda(\Omega|V\rangle) = \Lambda|\underset{V'}{\Omega V}\rangle$$

Comutador de dois Operadores

$$[\Omega,\Lambda] \equiv \Omega\Lambda - \Lambda\Omega$$

é um operador, e em geral NÃO é zero.

Eg Rotação aredor do x, seguida de aredor de ĵ. é diferente de a que tem a ordem invertida

$$R(\tfrac{\pi}{2}\hat{\imath})R(\tfrac{\pi}{2}\hat{\jmath}) - R(\tfrac{\pi}{2}\hat{\jmath})R(\tfrac{\pi}{2}\hat{\imath}) \neq 0 \,!$$

Operador Inverso

Definimos Ω^{-1} como o op. linear tal que

$$\Omega\Omega^{-1} = \Omega^{-1}\Omega = \mathbb{I} \longleftarrow \text{op. identidade.}$$

Elementos de Matriz de Operadores Lineares:

Da mesma forma que vetores podem ser expressos como matrices coluna de $n \times 1$ usando as suas componentes numa dada base, Operadores lineares podem ser expressados como matrices de $n \times n$.

Começamos pela ação de um operador num elemento da base $\{|i\rangle\}$ ~~ortonormal~~:

$$\Omega|i\rangle = |i'\rangle$$

Então a ação num vetor ~~qualquer~~ é

$$\Omega|V\rangle = \Omega \sum_i v_i|i\rangle = \sum_i v_i \Omega|i\rangle = \sum_i v_i|i'\rangle$$

As componentes do vetor $|i'\rangle$ podem ser escritas na base original usando

$$\boxed{\langle j|i'\rangle = \langle j|\Omega|i\rangle \equiv \Omega_{ji}}$$

Esses n^2 números são os elementos de matriz do operador Ω na base $\{|i\rangle\}$.

Atuando em um vetor $|V\rangle$ temos

$$\Omega|V\rangle = |V'\rangle = \sum_j v_j' |j\rangle$$

mas

$$v_i' = \langle i|V'\rangle = \langle i|\Omega|V\rangle$$

$$= \langle i|\Omega \left(\sum_j v_j |j\rangle\right)$$

$$v_i' = \sum_j v_j \langle i|\Omega|j\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{v_i' = \sum_j \Omega_{ij} v_j}$$

componentes do vetor transformado dados pela multiplicação de matrices

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \cdots & \Omega_{1n} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \cdots & \Omega_{2n} \\ \vdots & & & \\ \Omega_{n1} & \cdots & & \Omega_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

A coluna 1 é dado por

$$\langle j|\Omega|1\rangle = \langle j|1'\rangle$$

i.e. os componentes do vetor $|1\rangle$ transformado por Ω.

Em geral a coluna i é

$$\langle j|\Omega|i\rangle = \langle j|i'\rangle.$$

Exemplo (Fazer em lista)

$$\left\{\begin{aligned} R\left(\tfrac{\pi}{2}\hat{i}\right)|1\rangle &= |1\rangle \\ R\left(\tfrac{\pi}{2}\hat{i}\right)|2\rangle &= |3\rangle \\ R\left(\tfrac{\pi}{2}\hat{i}\right)|3\rangle &= -|2\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow R\left(\tfrac{\pi}{2}\hat{i}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Checar

usando $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vemos que

$$R\left(\tfrac{\pi}{2}\hat{i}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ; etc.}$$

Operador Identidade em forma matricial

$$I_{ij} = \langle i | I | j \rangle = \langle i | j \rangle = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ em } n = 3 .$$

Operadores de Projeção

Tínhamos visto que dada uma base ortonormal $\{|i\rangle\}$ podemos escrever

$$|V\rangle = \sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i|V\rangle$$

Os $|i\rangle\langle i|$ são de fato operadores lineares atuando nos $|V\rangle$.

Como já vimos

$$\sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i| = \mathbb{I} \quad \text{op. identidade}$$

$$|V\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i|\right)|V\rangle$$

definindo $\mathbb{P}_i \equiv |i\rangle\langle i|$

Podemos escrever

$$\mathbb{I} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i \quad \leftarrow \text{relação de completeza}$$

$\mathbb{P}_i$ são operadores de projeção associados à "direção" $|i\rangle$, tanto que

$$\mathbb{P}_i|V\rangle = v_i|i\rangle$$ "projeta" o vetor na direção $|i\rangle$ com v_i como coeficiente

$$\mathbb{P}_i \mathbb{P}_j = (|i\rangle\langle i|)(|j\rangle\langle j|)$$

$$= |i\rangle\langle i|j\rangle\langle j| = \delta_{ij}\,|j\rangle\langle j| = \delta_{ij}\,\mathbb{P}_j$$

$\Rightarrow$ se $i \neq j$ $\quad \mathbb{P}_i \mathbb{P}_j = 0$!

se $i = j$ $\quad \mathbb{P}_i^2 = \mathbb{P}_i$ $\leftarrow$ operadores $\mathbb{P}_i$ são idempotentes

Uma vez feita a projeção, sucessivas projeções são inócuas.

Em forma matricial:

$$(\mathbb{P}_i)_{kl} = \langle k|i\rangle\langle i|l\rangle = \delta_{ki}\,\delta_{il}$$

$\Rightarrow$ só um 1 na diagonal.

$$\mathbb{P}_i = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & & 0 \\ & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ ii \\ \\ \\ \end{array}$$

Operador Adjunto:

$$\Omega|V\rangle = |V'\rangle$$

O operador adjunto $\Omega^\dagger$ é tal que

$$\langle V|\Omega^\dagger = \langle V'|$$

A representação matricial do operador $\Omega^\dagger$ é obtida considerando uma dada base $\{|i\rangle\}$

$$(\Omega^\dagger)_{ij} = \langle i|\Omega^\dagger|j\rangle = \langle i'|j\rangle$$

$$= \langle j|i'\rangle^* = \langle j|\Omega|i\rangle^* = \Omega^*_{ji}$$

$\Rightarrow$ A matriz representando o operador adjunto $\Omega^\dagger$ é a matriz transposta e complexo conjugada representando Ω.

O adjunto de um produto de operadores é

$$(\Omega\Lambda)^\dagger = \Lambda^\dagger\Omega^\dagger \qquad \text{(Provar!)}$$

$$\Omega \Lambda |V\rangle = |V'\rangle \equiv |\Omega \Lambda V\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle \Omega \Lambda V| = \langle V'| = \langle V|(\Omega\Lambda)^\dagger$$

Mas,
$$\Omega \Lambda |V\rangle = \Omega |V''\rangle \equiv \Omega |\Lambda V\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle \Lambda V| \Omega^\dagger = \langle V| \Lambda^\dagger \Omega^\dagger = \langle V|(\Omega\Lambda)^\dagger$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Omega\Lambda)^\dagger = \Lambda^\dagger \Omega^\dagger}$$

Operadores Hermitianos e Anti-Hermitianos:

Um operador é hermitiano se satisfaz

$$\boxed{\Omega^\dagger = \Omega}$$

Ele é anti-hermitiano se satisfaz

$$\boxed{\Omega^\dagger = -\Omega}$$

Dado um operador qualquer Ω,
vemos que $\underline{\Omega + \Omega^\dagger}$ é hermitiano
enquanto que $\underline{\Omega - \Omega^\dagger}$ é anti-hermitiano

Então, sempre podemos decompor um operador numa parte hermitiana e outra anti-hermitiana, de acordo a

$$\Omega = \underbrace{\frac{\Omega + \Omega^\dagger}{2}}_{\text{parte hermitiana}} + \underbrace{\frac{\Omega - \Omega^\dagger}{2}}_{\text{parte anti-hermitiana}}$$

Operadores Unitários

Um operador U é unitário se ele satisfaz

$$U U^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}$$

Isto implica que

$$U^\dagger = U^{-1}$$

Operadores unitários preservam o produto interno

se $U|V_1\rangle = |V_1'\rangle$

e $U|V_2\rangle = |V_2'\rangle \Rightarrow \langle V_2'| = \langle V_2|U^\dagger$

então

$$\langle V_2'|V_1'\rangle = \langle V_2|U^\dagger U|V_1\rangle = \langle V_2|V_1\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle V_2'|V_1'\rangle = \langle V_2|V_1\rangle}$$

São como uma generalização das rotações para espaços vetoriais complexos.
($R(\vec{\theta})$ preserva $V_1 \cdot V_2$ em espaços reais, e.g. 3D)