Adição de Momento angular (II)

Aula 21

Em geral, queremos adicionar dois ou mais momentos angulares. Por exemplo

$$\vec{J}_1 \quad \text{e} \quad \vec{J}_2$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \\ J_z = J_{1z} + J_{2z} \end{cases}$$

Pergunta: Quais os autovalores e autovetores de J^2 e J_z?

A base produto é dada pelos estados

$$\{ |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle \} \leftarrow$$ autovetores simultâneos de J_1^2, J_2^2, J_{1z} e J_{2z}

tal que, por exemplo:

$$J_z |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle = \hbar(m_1 + m_2)|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle$$

Dado que

$$\begin{cases} [J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_{1k} \\ [J_{2i}, J_{2k}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_{2k} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ o momento angular total satisfaz

$$\boxed{[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k}$$

$\Rightarrow \quad [J^2, J_1^2] = 0$ (Provar em lista!)

etc.

$\Rightarrow$ { Queremos uma base de autovetores simultâneos de $\{J^2, J_z, J_1^2 \text{ e } J_2\}$

↳ Conjunto completo de observáveis que comutam

$\Rightarrow$ A nova base é

$$\{ |j, m; j_1, j_2\rangle \}$$

Porém, dado que j_1 e j_2 estão fixos, em geral ela é denotada como

$$\{ |j, m\rangle \}$$ (mas entendendo j_1 e j_2 fixos)

i.e.:
$$\begin{cases} J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle \\ J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle \\ J_1^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j, m\rangle \\ J_2^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1) |j, m\rangle \end{cases}$$

Para resolver o problema geral precisamos achar a forma de transformação de uma base na outra, i.e.

$$|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \longrightarrow |j, m\rangle$$

A transformação deve ser unitária. Para isso usamos que a identidade pode ser escrita como a soma

$$\sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle\langle j_1, m_1; j_2, m_2| = \mathbb{1}$$

dado que j_1 e j_2 estão fixos, i.e.: somando m_1 e m_2 incluímos todos os autovetores da base $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$.

Então, podemos escrever

$$\boxed{|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle\langle j_1, m_1; j_2, m_2|j, m\rangle}$$

$\Rightarrow$

$\langle j_1, m_1; j_2, m_2|j, m\rangle$: São os elementos da transformação unitária. São os chamados coeficientes de Clebsch-Gordan.

Os coeficientes de Clebsch-Gordon satisfazem os seguintes propriedades:

1) Dado $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m \rangle$ ele é zero se não se satisfaz que

$$\boxed{m = m_1 + m_2}$$

Prova:

$$J_z = J_{1z} + J_{2z}$$

$$\Rightarrow \quad (J_z - J_{1z} - J_{2z}) | j, m \rangle = 0$$

multiplicando pela esquerda por $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 |$:

$$\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | (J_z - J_{1z} - J_{2z}) | j, m \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \hbar (m - m_1 - m_2) \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ se $m \neq m_1 + m_2$

$$\Rightarrow \quad \left[\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m \rangle = 0 \right] \text{ q.e.d.}$$

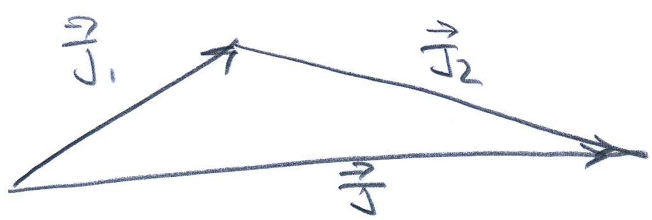
2) Identidade triangular

O CG é zero sempre que a seguinte relação é violada

$$\boxed{|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2}$$

Essa desigualdade é aparentemente intuitiva se interpretamos $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ como vetores clássicos.

I.e.:



Porém, precisamos testar se essa intuição está certa. Uma forma de fazer isso é ver que usando essa desigualdade obtemos a dimensionalidade correta da base $\{|j\, m\rangle\}$ que deve ser a mesma que a da base $\{|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle\}$. Essa base tem dimensão

$$\boxed{\underbrace{(2j_1+1)}_{\text{nº de possíveis valores de } m_1} \times \underbrace{(2j_2+1)}_{\text{nº de possíveis valores de } m_2}}$$

(lembrando que j_1 e j_2 são fixos)

Por outra parte, se a desigualdade triangular é válida, a dimensionalidade da base $\{|jm\rangle\}$ é

$$\sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1)$$

onde assumimos (arbitrariamente) $j_1 \geq j_2$. MAS

$$\sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1) = \sum_{j=0}^{j_1+j_2} (2j+1) - \sum_{j=0}^{j_1-j_2-1} (2j+1)$$

subtraindo os termos de $j=0$ até j_1-j_2-1 dado que eles NÃO estão!

Usando a fórmula

$$\sum_{i=0}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$= 2\sum_{j=0}^{j_1+j_2} j + \sum_{j=0}^{j_1+j_2} 1 - 2\sum_{j=0}^{j_1-j_2-1} j - \sum_{j=0}^{j_1-j_2-1} 1$$

$$= 2\frac{(j_1+j_2)(j_1+j_2+1)}{2} + (j_1+j_2+1) - 2\frac{(j_1-j_2-1)(j_1-j_2)}{2} - j_1-j_2$$

$$= (j_1+j_2+1)^2 - (j_1-j_2)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1)\times(2j_2+1)$$

$\Rightarrow$ É de fato a mesma!

3) Os coeficientes de CG formam uma matriz unitária. Mas por convenção, vamos considerá-los reais

$\Rightarrow$ Matriz ortogonal

$$U^{-1} = U^{\dagger} \longrightarrow O^{-1} = O^{T}$$

$\Rightarrow$ Eg:

$$\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m\rangle = \langle j, m | j_1, m_1; j_2; m_2\rangle$$

As condições de ortogonalidade são

$$\sum_{j,m} \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | j, m\rangle \langle j_1, m_1'; j_2\, m_2' | j, m\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\,\delta_{m_2 m_2'}$$

(Provar em lista)

A qual é óbvia dado que a base $\{|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle\}$ é ortonormal,

e também

$$\sum_{m_1,m_2} \langle j_1,m_1;j_2,m_2|j,m\rangle\langle j_1,m_1;j_2,m_2|j'm'\rangle$$

$$= \delta_{jj'}\,\delta_{mm'}$$

Desta última relação, se $j=j'$ e $m=m'$, temos que

$$\sum_{m_1,m_2} |\langle j_1,m_1;j_2,m_2|j,m\rangle|^2 = 1$$

o que é a condição de normalização da base

$$\{|jm\rangle\}$$

Notação: As vezes os CG são denotados como

$$C^{j_1 j_2 j}_{m_1 m_2 m} \equiv \langle j_1,m_1;j_2,m_2|j,m\rangle$$

Para calcular eles de forma geral devemos usar J_+ e J_-, tal como foi feito no caso de duas partículas de spin 1/2.

Então os estados do momento angular total são (assumindo j_1 e j_2 fixos):

$|j, m\rangle$ com as condições

$$\boxed{j_1 - j_2 \leq j \leq j_1 + j_2}$$

e, para cada j:

$$\boxed{-j \leq m \leq j}$$

Graficamente, podemos representar os estados como

$j \longrightarrow$

$m \downarrow$

j_1+j_2	j_1+j_2-1	...	j_1-j_2
$\lvert j_1+j_2, j_1+j_2\rangle$			
$\lvert j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle$	$\lvert j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle$	---	
$\lvert j_1+j_2, j_1+j_2-2\rangle$	$\lvert j_1+j_2-1, j_1+j_2-2\rangle$		$\lvert j_1-j_2, j_1-j_2\rangle$
$\vdots$	$\vdots$	---	$\vdots$
$\lvert j_1+j_2, -(j_1+j_2-1)\rangle$	$\lvert j_1+j_2-1, -(j_1+j_2-1)\rangle$	---	$\lvert j_1-j_2, -(j_1-j_2)\rangle$
$\lvert j_1+j_2, -(j_1+j_2)\rangle$			

Para obter os estados e, eventualmente, os coeficientes de Clebsch-Gordon, vamos começar com o estado de máximo j e máximo m, o estado do topo da coluna da esquerda. Ele só pode ter contribuição de um estado $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$: o estado com $m_1 = j_1$ e $m_2 = j_2$, os máximos valores de m_1 e m_2 possíveis.

$$\Rightarrow \quad |j_1+j_2; j_1+j_2\rangle = |j_1, j_1; j_2, j_2\rangle$$

Mas lembrando que

$$J_\pm |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\, |j, m\pm 1\rangle$$

e aplicando J_- no estado $|j, m\rangle$ (esquerda), obtemos:

$$J_- |j_1+j_2, j_1+j_2\rangle = \hbar \sqrt{2(j_1+j_2)}\, |j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle$$

Entanto que aplicando J_- ao estado-produto (da direita):

$$(J_{1-} + J_{2-})|j_1, j_1; j_2, j_2\rangle = \hbar\sqrt{2j_1}\, |j_1, j_1-1; j_2, j_2\rangle$$

$$+ \hbar\sqrt{2j_2}\, |j_1, j_1; j_2, j_2-1\rangle$$

$\Rightarrow$ Igualando ambos resultados

$$\boxed{|j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}\,|j_1, j_1-1; j_2, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}\,|j_1, j_1; j_2, j_2-1\rangle}$$

$\Rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}\text{obtivemos o segundo estado da primeira coluna em} \\ \text{termos da base-produto } (j_1 \otimes j_2)\end{array}\right\}$

Para obter o resto da coluna é só continuar aplicando

$J_- = J_{1-} + J_{2-}$ sucessivamente.

Para repetir o procedimento com a segunda coluna,

dado que

$$m = j_1 + j_2 - 1 \quad \text{em } |j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle$$

Já temos duas contribuições dos estados produto:

$$|j_1, j_1-1; j_2, j_2\rangle \quad \text{ou} \quad |j_1, j_1; j_2, j_2-1\rangle$$

tal que $\quad m_1 + m_2 = m = j_1 + j_2 - 1$

Então, em geral temos que o primeiro estado da segunda coluna pode ser escrito como

$$|j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle = a|j_1, j_1-1; j_2, j_2\rangle + b|j_1, j_1; j_2, j_2-1\rangle$$

onde a e b são números complexos a serem determinados. Impondo que o estado esteja normalizado resulta em

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

Além disso, esse estado deve ser ortogonal ao segundo estado da primeira coluna, o qual está construído com os mesmos estados produto:

$$\Rightarrow \langle j_1+j_2, j_1+j_2-1 | j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad a\sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} + b\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{b = -a\sqrt{\frac{j_1}{j_2}}}$$

$$\Rightarrow |a|^2+|b|^2=1 \Rightarrow |a|^2+|a|^2\left(\frac{j_1}{j_2}\right)=1$$

$$|a|^2\left(1+\frac{j_1}{j_2}\right)=1$$

$$\Rightarrow \boxed{a=\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}}$$ onde escolhimos a real e positivo (arbitrariamente)

$$\Rightarrow \boxed{b=-\sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}}$$

e obtemos

$$\boxed{\begin{aligned}|j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle &= \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}\,|j_1, j_1-1; j_2, j_2\rangle \\ &- \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}\,|j_1, j_1; j_2, j_2-1\rangle\end{aligned}}$$

(Nota: No Shankar o sinal (escolha de sinal de a) é o oposto.)

O resto da segunda coluna pode ser obtida a partir desse primeiro estado pela aplicação sucessiva de $J_- = J_{1-} + J_{2-}$.

Em soma, sempre é possível achar o primeiro estado de cada coluna, impondo a normalização e ortogonalidade dos estados.

Desses resultados podemos tirar os coeficientes de Clebsch-Gordan não nulos.

Por exemplo para o primeiro estado da primeira coluna temos

$$\langle j_1, j_1 ; j_2, j_2 | j_1+j_2, j_1+j_2 \rangle = 1$$

$$\Rightarrow \quad C^{j_1 j_2 (j_1+j_2)}_{j_1 j_2 (j_1+j_2)} = 1 \qquad \left(\text{Notação geral } C^{j_1 j_2 j}_{m_1 m_2 m} \right)$$

Para o segundo vemos que tem 2 possíveis valores não nulos

$$\left. \begin{aligned} & C^{j_1 j_2 (j_1+j_2)}_{(j_1-1) j_2 (j_1+j_2-1)} = \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} \\ e \quad & C^{j_1 j_2 (j_1+j_2)}_{j_1 (j_2-1) (j_1+j_2-1)} = \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} \end{aligned} \right\}$$

Entanto que apartir do primeiro estado da segunda coluna temos:

$$C^{j_1 j_2 (j_1+j_2-1)}_{(j_1-1) j_2 (j_1+j_2-1)} = \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}$$

e

$$C^{j_1 j_2 (j_1+j_2-1)}_{j_1 (j_2-1)(j_1+j_2-1)} = -\sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}$$

Finalmente, é possível derivar uma expressão recursiva para os coeficientes de CG usando $J_\pm$.

Partindo da expressão

$$|j\,m\rangle = \sum_{m_1'} \sum_{m_2'} |j_1, m_1'; j_2, m_2'\rangle\langle j_1, m_1'; j_2, m_2' | j\,m\rangle$$

onde usamos m_1' e m_2' (em lugar de m_1 e m_2) por conveniência, podemos agora aplicar $J_\pm = J_{1\pm} + J_{2\pm}$ nos dois lados.

Lembrando que

$$J_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,|j, m\pm 1\rangle$$

$\Rightarrow$

$$\hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\;|j, m\pm 1\rangle$$

$$= \sum_{m_1'}\sum_{m_2'}\hbar\left\{\sqrt{(j_1\mp m_1')(j_1\pm m_1'+1)}\;|j_1, m_1'\pm 1; j_2, m_2'\rangle\right.$$

$$\left. + \sqrt{(j_2\mp m_2')(j_2\pm m_2'+1)}\;|j_1, m_1'; j_2, m_2'\pm 1\rangle\right\}$$

$$\times \langle j_1, m_1'; j_2, m_2' | j m\rangle$$

Se agora multiplicamos essa equação pelo bra $\langle j_1, m_1; j_2, m_2|$ (no primes!), vemos que do lado direito os únicos termos não nulos são aqueles que satisfazem

$$m_1 = m_1' \pm 1 \quad , \quad m_2 = m_2' \quad \text{(primeiro termo)}$$

e

$$m_1 = m_1' \quad , \quad m_2 = m_2' \pm \quad \text{(segundo termo)}$$

Portanto, obtemos a relação:

$$\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\, \langle j_1, m_1 ; j_2, m_2 | j, m \pm 1 \rangle$$

$$= \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)}\, \langle j_1, m_1 \mp 1 ; j_2, m_2 | j m \rangle$$

$$+ \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)}\, \langle j_1, m_1 ; j_2, m_2 \mp 1 | j m \rangle$$

onde agora deve ser satisfeito que

$$m_1 + m_2 = m \pm 1$$

nos $\underline{\underline{3}}$ coeficientes envolvidos (conferir!)