Adição de Momento Angular (I) | Aula 20 |

Sistema de duas partículas de spin 1/2:

Consideremos 2 partículas de spins $\vec{S}_1$ e $\vec{S}_2$. O espaço de Hilbert do sistema é o produto direto do $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$; i.e $\mathcal{H}_{12}$ é dado pelos estados

$$|s_1 m_1, s_2 m_2\rangle = |s_1 m_1\rangle \otimes |s_2 m_2\rangle$$

Ou seja:

$$\begin{cases} S_1^2 |s_1 m_1, s_2 m_2\rangle = \hbar^2 s_1(s_1+1) |s_1 m_1, s_2 m_2\rangle \\ S_2^2 |s_1 m_1, s_2 m_2\rangle = \hbar^2 s_2(s_2+1) |s_1 m_1, s_2 m_2\rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{1z} |s_1 m_1, s_2 m_2\rangle = \hbar m_1 |s_1 m_1, s_2 m_2\rangle \\ S_{2z} |s_1 m_1, s_2 m_2\rangle = \hbar m_2 |s_1 m_1, s_2 m_2\rangle \end{cases}$$

Para simplificar a notação, e dado que sempre temos $s_1 = 1/2 = s_2$ e $m_{1,2} = \pm 1/2$, vamos a usar

$$\begin{cases} |++\rangle = |s_1 = 1/2, m_1 = +\tfrac{1}{2}, s_2 = \tfrac{1}{2}, m_2 = +\tfrac{1}{2}\rangle \\ |+-\rangle \\ |-+\rangle \\ |--\rangle \end{cases}$$

O operador

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

é o momento angular total.

Dado que $\vec{S}_1$ e $\vec{S}_2$ obedecem as regras de comutação

$$[S_{1i}, S_{1j}] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} S_{1k} \quad , \text{e } 1 \longrightarrow 2$$

Temos que $\vec{S}$ também as obedece, i.e.:

$$[S_i, S_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} S_k$$

O problema da <u>adição de momentos angulares</u> é achar os autovalores e autoestados de S^2 e S_z.

Começamos com $S_z = S_{1z} + S_{2z}$. Ele obviamente comuta com

$$S_1^2 \,,\, S_2^2 \,,\, S_{1z} \text{ e } S_{2z}$$

Na base

$$\{ |++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle \}$$

S_z deve ser diagonal. Para verificar, vemos que fazendo S_z atuar nesse espaço produto, obtemos

$$S_z|++\rangle = (S_{1z}+S_{2z})|++\rangle$$

$$\boxed{S_z|++\rangle = \left(\frac{\hbar}{2}+\frac{\hbar}{2}\right)|++\rangle = \hbar\,|++\rangle}$$

$$S_z|+-\rangle = (S_{1z}+S_{2z})|+-\rangle = \left(\frac{\hbar}{2}-\frac{\hbar}{2}\right)|+-\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_z|+-\rangle = 0\,|+-\rangle}$$

similarmente

$$\boxed{S_z|-+\rangle = 0\,|-+\rangle}$$

E, finalmente, temos que

$$S_z|--\rangle = (S_{1z}+S_{2z})|--\rangle = \left(-\frac{\hbar}{2}-\frac{\hbar}{2}\right)|--\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_z|--\rangle = -\hbar\,|--\rangle}$$

Então podemos construir S_z na representação matricial nessa base, lembrando que ela é ortonormal, i.e.:

$$\langle ++|++\rangle = 1 = \langle +-|+-\rangle = \langle -+|-+\rangle = \langle --|--\rangle$$

$$\langle ++|--\rangle = 0 = \langle ++|+-\rangle = \ldots, \text{ etc.}$$

A matriz representando o operador S_z nesta base é

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & ++ & +- & -+ & -- & \\
S_z = \hbar & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & & & & \begin{matrix} ++ \\ +- \\ -+ \\ -- \end{matrix}
\end{array}
$$

Vemos que o autovalor $s_z = 0$ é degenerado, compartilhado por $|+-\rangle$ e $|-+\rangle$. Então podemos obter qualquer combinação linear

$$a|+-\rangle + b|-+\rangle$$

ainda com $s_z = 0$. Porém, agora esses estados não serão autoestados de S_{1z} e S_{2z}.

Agora, consideremos o operador

$$S^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) \cdot (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}$$

($\vec{S}_1$ e $\vec{S}_2$ comutam)

S^2 comuta com S_1^2 e S_2^2.

Porém, não comuta com S_{1z} e S_{2z}. Isto pode ser visto dado que o termo

$$\vec{S}_1 . \vec{S}_2 = \underbrace{S_{1x} S_{2x} + S_{1y} S_{2y}}_{\text{Não comutam com } S_{1z} \text{ e } S_{2z}.} + S_{1z} S_{2z}$$

Mas na base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ onde S_{1z} e S_{2z} são diagonais temos que

$$S_{1x} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad S_{1y} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ;$$

$$S_{2x} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad S_{2y} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{1x} |+\rangle = +\frac{\hbar}{2} |-\rangle \; , & S_{1x} |-\rangle = \frac{\hbar}{2} |+\rangle \\ S_{1y} |+\rangle = i\frac{\hbar}{2} |-\rangle \; ; & S_{1y} |-\rangle = -i\frac{\hbar}{2} |+\rangle \end{cases}$$

e igualmente p/ S_{2x} e S_{2y}.

$\Rightarrow$ Por exemplo,

$$S_{1x} S_{2x} |++\rangle = \frac{\hbar^2}{4} |--\rangle$$

$$S_{1y} S_{2y} |++\rangle = -\frac{\hbar^2}{4} |--\rangle$$

E como

$$S_{1z} S_{2z} |++\rangle = \frac{\hbar^2}{4} |++\rangle \quad , \quad S_{1z} S_{2z} |--\rangle = \left(-\frac{\hbar}{2}\right)\left(-\frac{\hbar}{2}\right) |--\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle --| 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 |++\rangle = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle --| S^2 |++\rangle = 0}$$

Porém,

$$\langle ++| S^2 |++\rangle = \langle ++| S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 |++\rangle$$

$$= \frac{3}{4}\hbar^2 + \frac{3}{4}\hbar^2 + 2 \times \frac{\hbar^2}{4} = 2\hbar^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle ++| S^2 |++\rangle = 2\hbar^2}$$

Similarmente,

$$\boxed{\begin{aligned}\langle --| S^2 |--\rangle &= \langle --| S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 |--\rangle \\ &= \frac{3}{4}\hbar^2 + \frac{3}{4}\hbar^2 + 2\frac{\hbar^2}{4} = 2\hbar^2\end{aligned}}$$

Mas se calculamos

$$\langle +-| S^2 |+-\rangle = \langle +-| S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 |+-\rangle$$

Mas

$$\left.\begin{array}{l} S_{1x} S_{2x} |+-\rangle = \frac{\hbar^2}{2} |-+\rangle \\ S_{1y} S_{2y} |+-\rangle = \frac{\hbar^2}{2} |-+\rangle \end{array}\right] \text{não contribue aqui}$$

$$S_{1z} S_{2z} |+-\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(-\frac{\hbar}{2}\right) |+-\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle +-| S^2 |+-\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 + \frac{3}{4}\hbar^2 - \frac{2\hbar^2}{4} = \hbar^2}$$

Mesmo para $\boxed{\langle -+| S^2 |-+\rangle = \hbar^2}$

Finalmente, precisamos calcular

$$\langle +-| S^2 |-+\rangle = \langle +-| S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 |-+\rangle$$

vemos que agora $S_{1z} S_z$ não contribue, mas

$$\left.\begin{array}{l} S_{1x} S_{2x} |-+\rangle = \frac{\hbar^2}{4} |+-\rangle \\ S_{1y} S_{2y} |-+\rangle = \frac{\hbar^2}{4} |+-\rangle \end{array}\right] \text{Agora contribuirá}$$

Entanto que

$$\left(S_1^2 + S_2^2\right)|-+\rangle = \left(\frac{3}{4}\hbar^2 + \frac{3}{4}\hbar^2\right)|-+\rangle$$

$\Rightarrow$ agora NÃO contribuirá

$$\Rightarrow \langle +-|S^2|-+\rangle = 2\times\left(\frac{\hbar^2}{4} + \frac{\hbar^2}{4}\right)\langle +-|+-\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle +-|S^2|-+\rangle = \hbar^2}$$

e similarmente

$$\boxed{\langle -+|S^2|+-\rangle = \hbar^2}$$

A matriz de S^2 é então:

$$S^2 = \hbar^2 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ++ & +- & -+ & -- \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ ++ \\ +- \\ -+ \\ -- \end{array}$$

$\Rightarrow$ S^2 não é diagonal nessa base.

$|++\rangle$ autoestado de $\hbar^2 s(s+1) = 2\hbar^2 \Rightarrow s = 1$

$|--\rangle$ " " $\hbar^2 s(s+1) = 2\hbar^2 \Rightarrow s = 1$

Então vemos que $|++\rangle$ e $|--\rangle$ são autoestados de S^2, porém $|+-\rangle$ e $|-+\rangle$ não são.

Uma forma (que conhecemos) de obter os autoestados de S^2 é usar S_+ e S_-, i.e.

$$S_\pm = S_x \pm i S_y$$

Sendo que $\left\{ \begin{array}{l} S_x = S_{1x} + S_{2x} \\ S_y = S_{1y} + S_{2y} \end{array} \right\}$

Sabemos que o estado $|++\rangle$, por exemplo, tem

$$m = m_1 + m_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$\Rightarrow |++\rangle$ é um estado de $\underline{\text{máximo } m}$ dado

que $S_+|++\rangle = S_{1+}|++\rangle + S_{2+}|++\rangle$

$$= 0 + 0 = 0$$

Por outra parte, se aplicamos

$$S_-|++\rangle = S_{1-}|++\rangle + S_{2-}|++\rangle$$

$$= \hbar|-+\rangle + \hbar|+-\rangle$$

$$\Rightarrow S_-|++\rangle = \hbar\{|+-\rangle + |-+\rangle\}$$

Portanto, o estado (normalizado)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right)$$

É um auto estado de S^2 com auto valor $\hbar^2 s(s+1) = 2\hbar^2$

Ele, claramente corresponde a $\boxed{m=0}$

Finalmente, aplicando S_- a esse estado chegamos a

$$S_- \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(S_{1-} + S_{2-}\right)\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left(|--\rangle + |--\rangle\right) = \sqrt{2}\,\hbar\ |--\rangle$$

que, normalizado, é $|--\rangle$

$\Rightarrow$ <u>os estados de $s=1$ são</u>:

$$S=1 \begin{cases} |++\rangle & m=1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right) & m=0 \\ |--\rangle & m=-1 \end{cases}$$

Ou, na notação $|s\, m\rangle$ do momento angular total S e S_z,

$$\left.\begin{aligned} |1\,1\rangle &= |+\,+\rangle \\ |1\,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\,-\rangle + |-\,+\rangle\right) \\ |1\,-1\rangle &= |-\,-\rangle \end{aligned}\right\} S=1$$

Porém falta um estado (que corresponde a $S=0$). Uma forma de obtê-lo é observar que o bloco de 2×2 no meio de S^2 é

$$S^2 \sim \hbar^2 \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} +- & -+ \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} +- \\ -+ \end{array} \end{array}$$

A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tem autovalores:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 = 1 \Rightarrow 1-\lambda = \pm 1$$

$$\Rightarrow \lambda = \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Autovalor 2 :

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = v_2$$

$\Rightarrow$ autovetor é (normalizado)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}+-\\ -+\end{array}\end{array}$$

o que na nossa notação é

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right)}$$

autovalor de $S^2 = \hbar^2 s(s+1) = 2\hbar^2$ ✓

Autovalor $\emptyset$:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = -v_2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}+-\\ -+\end{array}\end{array}$$

$\Rightarrow$ o autovetor do autovalor $0 = \hbar^2 s(s+1)$ $(s=0)$

é dado por

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)} \quad s = 0$$

ou

$$\boxed{|0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)}$$

Resumindo em $|s\,m\rangle$ temos

$$|1\;1\rangle = |++\rangle \qquad m=1$$

$$|1\;0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right) \qquad m=0$$

$$|1\;-1\rangle = |--\rangle \qquad m=-1$$

"tripleto" de $s=1$

e

$$|0\;0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$$ "singleto" de $s=0$

O problema de adição de momento angular é então uma mudança de base da base $|s_1 m_1, s_2 m_2\rangle$ à base $|s\,m\rangle$. A primeira diagonaliza os operadores S_1^2, S_2^2, S_{1z} e S_{2z}, enquanto a nova base $|s\,m\rangle$ diagonaliza S^2, S_z, além de S_1^2 e S_2^2.

Do ponto de vista do espaço de Hilbert, passamos da base produto, dada pelos estados

$$|s_1 m_1, s_2 m_2\rangle = |s_1 m_1\rangle \otimes |s_2 m_2\rangle \qquad \boxed{s_1 = s_2 = 1/2}$$

à base do spin (ou momento angular) total

$$|S, m\rangle \quad \text{onde } \boxed{S = 0 \text{ ou } 1}$$

Isto pode ser expressado simbolicamente como

$$\boxed{\tfrac{1}{2} \otimes \tfrac{1}{2} = 1 \oplus 0}$$

⇒ O produto direto de dois espaços de Hilbert com $s = 1/2$ é equivalente à soma direta de um espaço de $S = 1$ com um de $S = 0$.

A dimensão dos dos espaços deve ser a mesma:
A dimensão de cada espaço de Hilbert com $s_i = 1/2$ $(i = 1, 2)$

é $(2 s_i + 1) \quad i = 1, 2$

as possíveis formas de m_i.

Para S, a degenerescência é

$$\sum_{S=0}^{1} (2S+1) = 1 + 3 = 4$$

Para a base produto é

$$(2s_1+1) \times (2s_2+1) = \left(2\tfrac{1}{2}+1\right)\left(2\tfrac{1}{2}+1\right) = 4 \checkmark$$

Na representação por matrizes, os operadores S^2, S_z são matrizes de 4×4. Mas a decomposição vista acima mostra que elas são redutíveis a uma matriz de 3×3 (representando o setor $S=1$) e uma matriz 1×1 representando o $S=0$.