Spin III

Aula 19

Dinâmica de Sistemas de Spin 1/2 :

Classicamente :

Um loop de corrente I e área A tem um momento magnético

$$\vec{\mu} = \frac{IA}{c}\,\hat{e}_\perp$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo (unidades Gaussianas) e $\hat{e}_\perp$ é um versor apontando na direção perpendicular ao plano da corrente (ou é a normal à área $\vec{A} = A\,\hat{e}_\perp$).

Em presença de um campo magnético $\vec{B}$ existe um torque dado por

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Portanto, a <u>posição de equilíbrio</u> é a do momento magnético apontar na direção de $\vec{B}$.

Uma outra forma de ver/mostrar isto é olhando para o hamiltoniano da interação de $\vec{\mu}$ com $\vec{B}$:

A contribuição do torque ao hamiltoniano é

$$\mathcal{H}_{int} = \int \tau(\theta)\, d\theta = \int \mu B \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$\left[\mathcal{H}_{int} = -\mu B \cos\theta = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} \right]$$

$\Rightarrow$ Novamente, vemos que a energia é minimizada (posição de equilíbrio) quando $\theta \to 0$.

O valor clássico do momento magnético μ, no caso de uma partícula de carga elétrica q e massa m, é

$$\mu = \frac{q}{2mc} L$$

onde L é o módulo do momento angular.

(Lembrando: Ex: trajetória circular de raio r

$$\Rightarrow \quad I = \frac{qv}{2\pi r} \Rightarrow \left[\mu = \frac{qv}{2\pi r}\frac{\pi r^2}{c} = \frac{q}{2mc}\underbrace{mvr}_{L} \right])$$

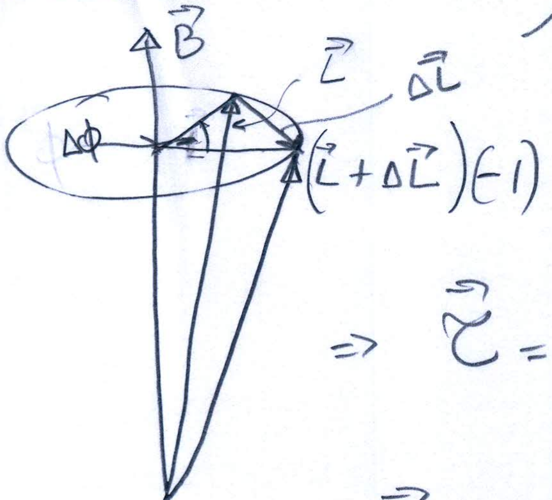
Vetorialmente temos que

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2mc}\vec{L} = \gamma \vec{L}$$

onde γ é chamado de <u>razão ou fator giromagnético</u>.

Precessão:

No caso de uma partícula com momento angular $\vec{L}$ o efeito restaurativo do torque resulta em precessão do vetor $\vec{\mu}$ aredor de $\vec{B}$.



Mas $\Delta\vec{L} \perp \vec{L}$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \gamma \vec{L} \times \vec{B} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{L} = \gamma \vec{L} \times \vec{B}\, \Delta t$$

ou $$\Delta L = \gamma L B \,\text{sen}\,\theta\, \Delta t \;]$$

Mas

$$\Delta\phi = -\frac{\Delta L}{L\,\text{sen}\,\theta} = -\gamma B \Delta t$$

$\Rightarrow$ frequência de precessão $\Big\}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\omega} = -\gamma \vec{B}}$ oposta ao campo magnético

Momento magnético Orbital em Mecânica Quântica:

O hamiltoniano de uma partícula carregada em presença de um campo magnético é

$$H = \frac{\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}{2m}$$

onde $\vec{A}$ é o potencial vetor. Se escolhemos ele como

$$\vec{A} = \frac{B}{2}\left(-Y\hat{x} + X\hat{y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left[\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = B\hat{z}\right]$$

Por outra parte, H pode ser expandido como

$$H = \frac{P^2}{2m} - \frac{q}{2mc}\left(\vec{P}.\vec{A} + \vec{A}.\vec{P}\right) + \frac{q^2}{2mc^2}A^2$$

Mas $\vec{A}$ e $\vec{P}$ são operadores atuando num estado $|\psi\rangle$ (ou na função de onda $\psi(\vec{x},t)$).

$$\Rightarrow \quad \vec{P}.\vec{A}\psi = -i\hbar\vec{\nabla}.(\vec{A}\psi)$$

$$= -i\hbar\left\{\psi\vec{\nabla}.\vec{A} + \vec{A}\vec{\nabla}\psi\right\}$$

$$\Rightarrow \vec{P}\cdot\vec{A} = -i\hbar\,\psi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{P}$$

Mas sempre podemos escolher

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \quad \text{(Coulomb gauge)}$$

devido à escolha de gauge ser livre (resultar no mesmo $\vec{B}$ dado que $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ dá no mesmo). De fato esse é o caso na escolha que fizemos para $\vec{A}$.

$$\Rightarrow \vec{P}\cdot\vec{A} = \vec{A}\cdot\vec{P}$$

$$\Rightarrow \left[H = \frac{P^2}{2m} - \frac{2q\vec{A}\cdot\vec{P}}{2mc} + \frac{q^2}{2mc^2}A^2 \right]$$

Mas

$$\vec{A}\cdot\vec{P} = \frac{B}{2}(-Y\hat{x} + X\hat{y})\cdot\vec{P}$$

$$= \frac{B}{2}\left(-YP_x + XP_y\right) = \frac{B}{2}L_z$$

$\Rightarrow$ o hamiltoniano de interação é

$$H_{int} = -\frac{q}{2mc}\vec{L}\cdot\vec{B}$$

onde desprezámos o último termo, quadrático em B, o que podemos fazer assumindo que B é pequeno.

O H_{int} é uma perturbação no H e portanto (por enquanto) só pegamos o termo linear em B.

Então vemos que o momento magnético é

$$\boxed{\vec{\mu} = \frac{q}{2mc}\vec{L}}$$

igual a expressão clássica, mas agora é um operador, proporcional ao momento angular orbital $\vec{L}$.

Por exemplo, se $\vec{L} = L_z \hat{z}$

$$\boxed{\mu_z = \frac{q}{2mc}\hbar m}$$ com $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\Rightarrow$ Eletron

$$\frac{e\hbar}{2m_e c} \simeq 0.6\ 10^{-8}\ \frac{eV}{G}$$

Nucleon

$$\frac{e\hbar}{2M_p c} \simeq 0.3\ 10^{-11}\ \frac{eV}{G}$$

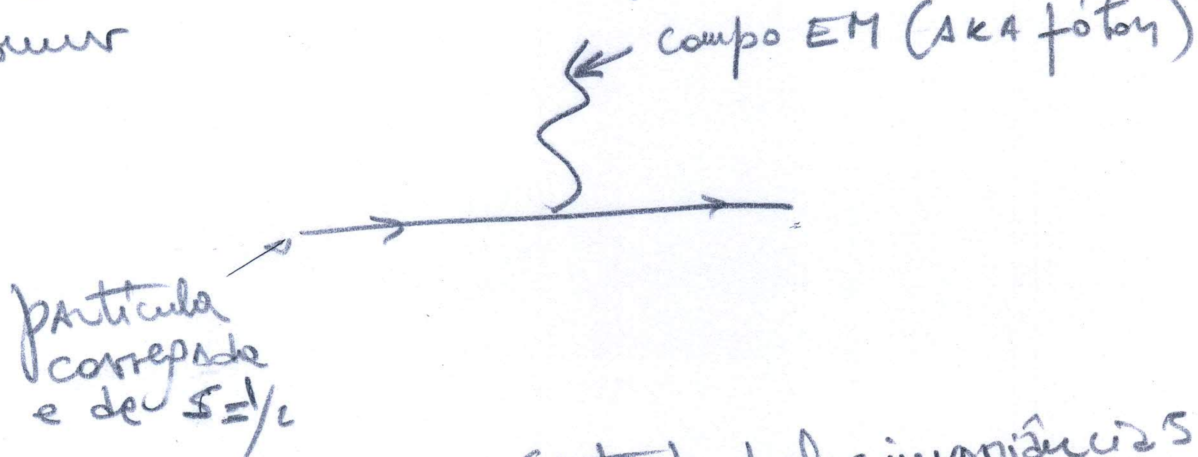
Magneton de Bohr

Momento Magnético do Spin:

Mesmo em ausência de momento angular orbital $\vec{L}$, uma partícula com spin terá um momento magnético associado. Tal como no caso do associado a $\vec{L}$, é dado por

$$\boxed{\vec{\mu} = \gamma \vec{S}}$$

onde γ é uma constante. De onde vem essa expressão? Ela não tem uma analogia clássica. Ela vem diretamente da teoria quântica relativista. Uma partícula de spin 1/2 interagindo com um campo eletromagnético resulta (em primeira ordem em teoria de perturbações em diagramas como



A forma da interação (ditada pelas invariâncias de Lorentz e de gauge resulta em

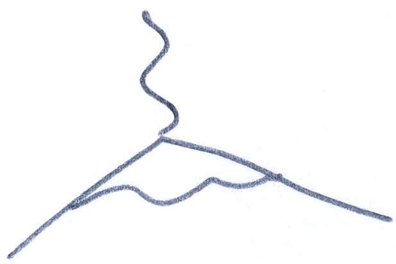
$$\vec{\mu} = g\left(\frac{e}{2mc}\right)\vec{S}$$

Onde a constante g é obtida em teoria de perturbações e na 1ª ordem é

$$\boxed{g = 2\ !}$$

Ou seja, a razão giromagnética de spin é duas vezes maior do que no caso do momento angular orbital $\vec{L}$.

Se levamos em conta as primeiras correções vindas de



$$\Rightarrow \quad g = 2 + O(\alpha) \quad ; \quad \alpha \simeq \frac{1}{137}$$

$\Rightarrow$ $g \simeq 2$ é uma boa aproximação

De fato na QED é

$$g = 2\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + O(\alpha^2)\right)$$

$\Rightarrow$ $\gamma \simeq \dfrac{e}{mc}$ (em lugar de $\dfrac{e}{2mc}$!)

Então o hamiltoniano é

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{H = -\frac{e}{mc} \vec{S} \cdot \vec{B}}$$

Precessão do Spin:

Se o campo magnético é

$$\vec{B} = B \hat{z}$$

$$\Rightarrow \quad H = -\frac{eB}{mc} S_z$$

$\Rightarrow$ o operador evolução é

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} = e^{\frac{i}{\hbar} \frac{eB}{mc} S_z t}$$

definindo

$$\omega = \frac{eB}{mc}$$

$$\Rightarrow \quad \left[U(t) = e^{\frac{i}{\hbar} S_z \omega t} \right]$$

$\Rightarrow$ <u>evolução temporal</u> é uma "<u>rotação</u>" ao redor de $\hat{z}$ por um "<u>ângulo</u>" $\boxed{-\omega t}$

Então, aplicando ele a um estado geral de uma partícula de $S = 1/2$ com $\vec{B} = B\hat{z}$ (10)

$$|\chi\rangle_{(0)} = |+\rangle\langle +|\chi\rangle + |-\rangle\langle -|\chi\rangle$$

$$\Rightarrow |\chi\rangle_{(t)} = U(t)|\chi\rangle_{(0)} = e^{\frac{i}{\hbar} S_z \omega t} |\chi\rangle_{(0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\chi\rangle(t) = e^{\frac{i\omega t}{2}} |+\rangle\langle +|\chi\rangle + e^{-\frac{i\omega t}{2}} |-\rangle\langle -|\chi\rangle}$$

Por outra parte, sabemos que

$$\begin{cases} \langle S_x\rangle(t) = \langle S_x\rangle_{(0)} \cos\omega t + \langle S_y\rangle_{(0)} \operatorname{sen}\omega t \\ \langle S_y\rangle(t) = -\langle S_x\rangle(0) \operatorname{sen}\omega t + \langle S_y\rangle_{(0)} \cos\omega t \\ \langle S_z\rangle(t) = \langle S_z\rangle(0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ o vetor $\langle\vec{S}\rangle(t)$ completa uma volta de precessão em um tempo

$$\boxed{\tau_{prec.} = \frac{2\pi}{\omega}}$$

OK ✓

Mas o estado é

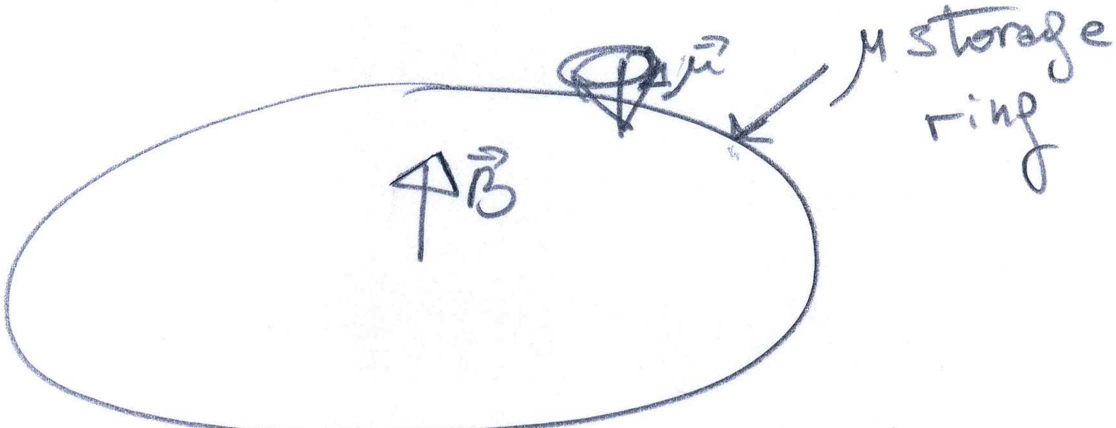
$$|x\rangle_{(\tau_{prec.})} = e^{i\pi}|+\rangle\langle+|x\rangle + e^{-i\pi}|-\rangle\langle-|x\rangle$$

$$= (-1)\,|x\rangle_{(0)}$$

$\Rightarrow$ [Para retornar ao estado original $|x\rangle_{(0)}$ $\langle\vec{S}\rangle$ deve dar duas voltas de precessão]

$$\Rightarrow \left[\, |x\rangle_{(2\tau_{prec})} = e^{i2\pi}|x\rangle_{(0)} = |x\rangle_{(0)} \,\right]$$

Medição de g do μ (ou $(g-2)$)



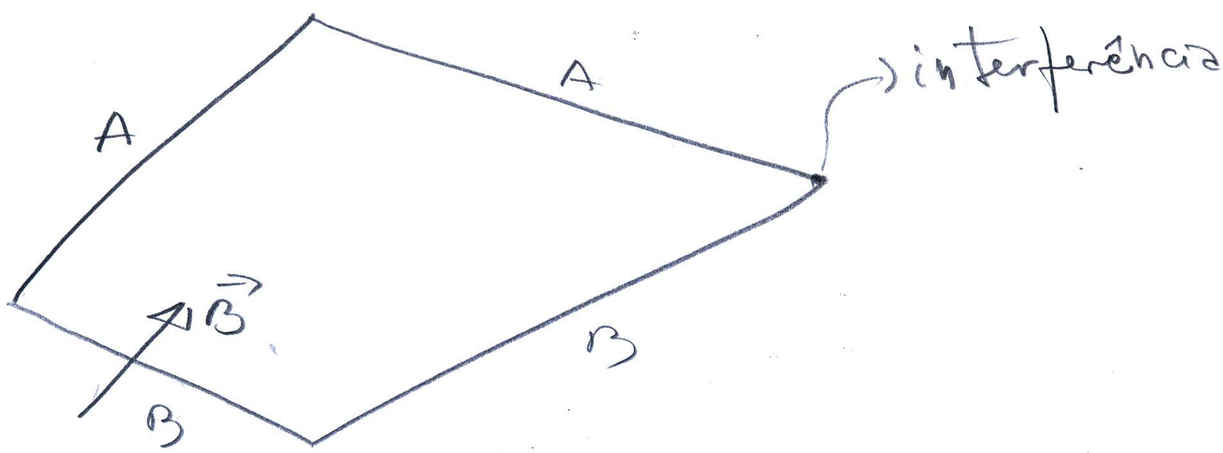
$$\omega = \frac{g}{2}\frac{eB}{mc}$$

medida de altíssima precisão de $g = 2\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + O(\alpha^2) + \dots O(\alpha^6)\right)$!

sensível à física além do Modelo padrão da física de partículas.

Interferometria de Neutrons:

Uma forma de detetar o sinal (−1) após uma rotação de 2π num spin $= 1/2$ é comparar um feixe de partículas "rotadas" e outro de partículas "não-rotadas".
Se temos um feixe de neutrons monoenergético e o separamos em dois trajetórias A e B



e no caminho B existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$, o feixe (ou o estado) que faz a trajetória B sofre uma "rotação" ou uma adição de fase

$$e^{\pm \frac{i\omega T}{2}}$$

onde T é o tempo no qual o feixe B está sujeito ao campo magnético $\vec{B}$ e a frequência é

$$\omega = \frac{g_n e B}{m_n c}$$

com $g_n \simeq -1.91$ e m_n a massa do neutron

o momento magnético sendo

$$\mu_n = \frac{g_n e}{2 m_n c}$$

o padrão de interferência é

$$\sim \left| a_1 + a_2 e^{\pm \frac{i\omega T}{2}} \right|^2$$

$$= |a_1|^2 + |a_2|^2 + a_1^* a_2 e^{\pm \frac{i\omega T}{2}} + a_1 a_2^* e^{\mp \frac{i\omega T}{2}}$$

$$= |a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_1||a_2| \cos\left(\pm \frac{\omega T}{2}\right)$$

assumindo que os dois feixes tem a mesma fase

i.e.: $\frac{a_2}{a_1} = \left|\frac{a_2}{a_1}\right| e^{i\delta}$ com $\delta = 0$

$\Rightarrow$ modulação da intensidade depende de ter esse fator de 2!

NA prática, variando B podemos ir de um máximo de intensidade ao próximo (T é conhecido)

$\Rightarrow$ variar B para ~~ter~~ $\Delta\omega$ /

$$\frac{\Delta\omega T}{2} = 2\pi.$$

$$\Rightarrow \frac{g_m e}{2m_m c} \Delta B \cdot T = 2\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta B = \frac{4\pi m_m c}{g_m e T}}$$

variação do campo magnético para ir de um máximo de interferência ao próximo.
É 2 vezes o que seria classicamente.