Spin II

Exemplo: Consideramos uma partícula cuja função de onda de spin é

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

O que isto quer dizer é que a função de onda é um espinor

$$\Psi_a(\vec{r}) = \psi(\vec{r})\, \chi \longrightarrow \text{espinor}$$

$\hookrightarrow a = 1,2$

$\hookrightarrow$ função escalar com a dependência em $\vec{r}$.

Do ponto de vista do espaço de Hilbert temos

$$|\Psi_a\rangle = |\psi(\vec{r})\rangle \otimes |\chi\rangle$$

$\hookrightarrow$ função de onda espacial é $\langle \vec{r} | \psi(\vec{r}) \rangle$

Pergunta: Calcular as probabilidades de obter $+\frac{\hbar}{2}$ e $-\frac{\hbar}{2}$ se medimos S_z e S_x.

Então se

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1+i}{\sqrt{6}} \\ b = \dfrac{2}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Probabilidade de obter $S_z = +\frac{\hbar}{2}$ é $|a|^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(S_z = +\frac{\hbar}{2}) = \dfrac{|1+i|^2}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\ P(S_z = -\frac{\hbar}{2}) = |b|^2 = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Mas para os medições em S_x ser $\pm\frac{\hbar}{2}$ temos

$$P(S_x = +\frac{\hbar}{2}) = \frac{|a+b|^2}{2} = \frac{|3+i|^2}{2\times 6} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$P(S_x = -\frac{\hbar}{2}) = \frac{|a-b|^2}{2} = \frac{|-1+i|^2}{2\times 6} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

E os valores esperados?

$\langle S_x \rangle$ e $\langle S_z \rangle$?

$$\langle S_z \rangle = \left(+\frac{\hbar}{2}\right)\frac{1}{3} + \left(-\frac{\hbar}{2}\right)\frac{2}{3} = -\frac{\hbar}{6}$$

ou

$$\langle S_z \rangle = \chi^\dagger S_z \chi = \frac{(1-i \quad 2)}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{6}(1-i \quad 2) \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2}(1+i) \\ -\hbar \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\hbar(1-2) = -\frac{\hbar}{6}$$ ✓

E para S_x é:

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2}\frac{5}{6} + \left(-\frac{\hbar}{2}\right)\frac{1}{6} = +\frac{\hbar}{3}$$

ou

$$\langle S_x \rangle = \chi^\dagger S_x \chi = \frac{(1-i \quad 2)}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & \hbar/2 \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{(1-i \quad 2)}{6} \begin{pmatrix} \hbar \\ \frac{\hbar}{2}(1+i) \end{pmatrix} = \left\{(1-i)\hbar + \hbar(1+i)\right\}\frac{1}{6}$$

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{3}$$ ✓

Rotação de um estado de Spin 1/2

Consideremos um estado de spin 1/2, $|\chi\rangle$, e a ação nele de uma rotação ao redor do eixo $\hat{z}$ por um ângulo ϕ.

$$\Rightarrow \quad |\chi'\rangle = R_z(\phi)\,|\chi\rangle$$

onde

$$R_z(\phi) = e^{-\frac{i}{\hbar} S_z \phi}$$

Qual o efeito do $R_z(\phi)$ no sistema físico?

Para ver isto olhamos o comportamento dos valores esperados.

$\langle S_z \rangle$:

$$\langle \chi | S_z | \chi \rangle \longrightarrow \langle \chi | e^{\frac{i}{\hbar} S_z \phi} S_z e^{-\frac{i}{\hbar} S_z \phi} | \chi \rangle$$

Mas $[S_z, S_z] = 0 \Rightarrow \langle S_z \rangle \longrightarrow \langle S_z \rangle$ ✓

$\Rightarrow \langle S_z \rangle$ não muda sob $R_z(\phi)$

$\langle S_x \rangle$:

Para calcular $\langle S_x \rangle$ precisamos calcular

$$e^{\frac{i}{\hbar} S_z \phi} S_x \, e^{-\frac{i}{\hbar} S_z \phi}$$

1) Explicitamente :

$$e^{\frac{i}{\hbar}S_z\phi}\, S_x\, e^{-\frac{i}{\hbar}S_z\phi}$$

$$= \left[\mathbb{1} + \frac{i}{\hbar}S_z\phi + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)^2 S_z^2 + \cdots\right] S_x \left[\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}S_z\phi + \frac{1}{2!}\left(\frac{-i\phi}{\hbar}\right)^2 S_z^2 + \cdots\right]$$

$$= S_x + \frac{i}{\hbar}\phi S_z S_x - \frac{i}{\hbar}\phi S_x S_z$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)^2 S_z^2 S_x + \frac{1}{2}\left(\frac{-i\phi}{\hbar}\right)^2 S_x S_z^2 - \left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)^2 S_z S_x S_z$$

$$+ \cdots$$

$$= S_x + \frac{i\phi}{\hbar}\underbrace{[S_z, S_x]}_{i\hbar S_y} + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)^2 \underbrace{[S_z, \overbrace{[S_z, S_x]}^{i\hbar S_y}]}_{-i\hbar S_x} + \cdots$$

$$= S_x - \phi S_y - \frac{1}{2!}\phi^2 S_x + \frac{1}{3!}\phi^3 S_y$$

$$\uparrow \frac{1}{3!}\left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)^3 [S_z, [S_z, [S_z, S_x]]]$$

$$+ \cdots$$

$$= S_x\left(1 - \frac{1}{2!}\phi^2 + \cdots\right) - S_y\left(\phi - \frac{1}{3!}\phi^3 + \cdots\right)$$

$$= S_x \cos\phi - S_y \operatorname{sen}\phi$$

$$\Rightarrow e^{\frac{i}{\hbar} S_z \phi}\, S_x\, e^{-\frac{i}{\hbar} S_z \phi} = S_x \cos\phi - S_y \operatorname{sen}\phi$$

$\Rightarrow$ Sob uma rotação aredor do $\hat{z}$

$$\langle S_x \rangle \longrightarrow \langle S_x \rangle \cos\phi - \langle S_y \rangle \operatorname{sen}\phi$$

Tal como a componente $\hat{x}$ de um vetor clássico se comporta sob uma rotação clássica.

$$\begin{pmatrix} \langle S_x \rangle' \\ \langle S_y \rangle' \\ \langle S_z \rangle' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle S_x \rangle \\ \langle S_y \rangle \\ \langle S_z \rangle \end{pmatrix}$$

—o—

Mas tem outra forma, mais fácil, de obter esse resultado. Para isso precisamos escrever os operadores S_x, S_y e S_z em termos dos outros estados $\{|1/2, m\rangle\}$.

2) Na base $\{|1/2, m\rangle\}$ com $m = \pm 1/2$:

Para simplificar, vamos chamar a base de

$$\left\{\left|\tfrac{1}{2}, \pm \tfrac{1}{2}\right\rangle\right\} = \left\{|\pm\rangle\right\}$$

O operador S_z, por exemplo, pode ser escrito como

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\left\{|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right\}$$

Para ver que essa forma está certa, calculamos S_z em forma de matriz como

$$\mathbb{S}_z = \begin{pmatrix} \langle+|S_z|+\rangle & \langle+|S_z|-\rangle \\ \langle-|S_z|+\rangle & \langle-|S_z|-\rangle \end{pmatrix}$$

Usando que $\langle+|+\rangle = 1$, $\langle-|-\rangle = 1$, $\langle+|-\rangle = 0$

obtemos S_z em forma matricial

$$\mathbb{S}_z = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix}$$

tal e como tínhamos antes.

Fazendo o mesmo para S_x e S_y obtemos

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\left\{|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right\}$$

$$\Rightarrow \quad S_x = \begin{pmatrix} 0 & \hbar/2 \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

e
$$S_y = \frac{\hbar}{2}\left\{-i|+\rangle\langle-| + i|-\rangle\langle+|\right\}$$

$$\Rightarrow \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & -i\hbar/2 \\ i\frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Então usando essas expressões para S_z e S_x vamos calcular o efeito da rotação aredor de $\hat{z}$ em S_x

$$e^{\frac{i}{\hbar}S_z\phi}\, S_x\, e^{-\frac{i}{\hbar}S_z\phi}$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar}S_z\phi}\, \frac{\hbar}{2}\left\{|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right\} e^{-\frac{i}{\hbar}S_z\phi}$$

Mas $S_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}$ $\left(\hbar m \text{ com } m = +\frac{1}{2}\right)$

e $S_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}$ $\left(\hbar m \text{ com } m = -\frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow e^{\frac{i}{\hbar} S_z \phi} S_x e^{-\frac{i}{\hbar} S_z \phi}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left\{ e^{i\phi/2} |+\rangle\langle -| e^{i\phi/2} + e^{-\frac{i\phi}{2}} |-\rangle\langle +| e^{-\frac{i\phi}{2}} \right\}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left\{ e^{i\phi} |+\rangle\langle -| + e^{-i\phi} |-\rangle\langle +| \right\}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left\{ \left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| \right) \cos\phi + \left(|+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle +| \right) i \operatorname{sen}\phi \right\}$$

$$= S_x \cos\phi - S_y \operatorname{sen}\phi$$

tal e como tinhamos obtido explicitamente.

Uma consequência interessante:

Se considerarmos um estado qualquer $|\chi\rangle$ e usarmos que a identidade pode ser escrita na base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ como

$$\mathbb{1} = |+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|$$

então podemos escrever $|\chi\rangle$ como

$$|\chi\rangle = |+\rangle\langle+|\chi\rangle + |-\rangle\langle-|\chi\rangle$$

Se agora aplicarmos uma rotação ao redor de $\hat{z}$ ao $|\chi\rangle$ temos

$$e^{-\frac{i}{\hbar}S_z\phi}|\chi\rangle = e^{-\frac{i\phi}{2}}|+\rangle\langle+|\chi\rangle + e^{\frac{i\phi}{2}}|-\rangle\langle-|\chi\rangle$$

Em particular, se $\phi = 2\pi$, vemos que o efeito da rotação por 2π é

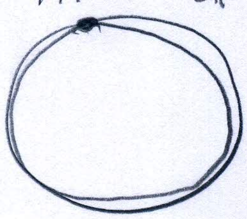
$$e^{-\frac{i}{\hbar}S_z 2\pi}|\chi\rangle = |\chi'\rangle_{2\pi} = (-1)\left\{|+\rangle\langle+|\chi\rangle + |-\rangle\langle-|\chi\rangle\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\chi'\rangle_{2\pi} = (-1)|\chi\rangle} \;!!$$

$\Rightarrow$ Para que um estado de spin 1/2 retorne a ele mesmo, a rotação deve ser de 4π !!

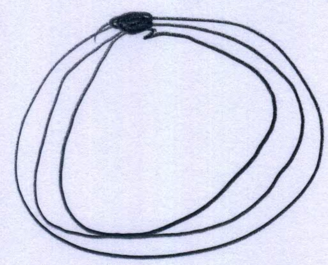
Spin inteiro $(0,1,2,\ldots)$

$|\psi\rangle = |\psi'\rangle_{2\pi}$



Spin 1/2

$|\psi\rangle = |\psi'\rangle_{4\pi} = -|\psi'\rangle_{2\pi}$



Forma Geral do Espinor:

Voltando à representação matricial, uma rotação ao redor de um eixo na direção $\hat{n}$ é dada pelo operador

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{S}\cdot\hat{n}\,\phi}$$

ou, usando que $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, com $\vec{\sigma}$ as matrizes de Pauli, temos

$$e^{-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{n}}{2}\phi}$$

A expansão de

$$e^{-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{m}}{2}\phi}$$

pode ser simplificada usando algumas propriedades das matrizes de Pauli.

1) Da definição

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

e usando que

$$[S_i, S_j] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk} S_k$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k}$$

2) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ · $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$

· $\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 0$ para $i \neq j$

$$\Rightarrow \quad \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}}$$

onde $\{\,,\}$ é o anti-comutador

3) $\boxed{\sigma_i^\dagger = \sigma_i}$

4) $\boxed{\det \sigma_i = -1}$

5) $\boxed{\mathrm{Tr}(\sigma_i) = 0}$

6) Uma importante propriedade é:

$$\boxed{(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})}$$

$\forall \vec{A}, \vec{B}$. Para provar ela escrevemos em componentes

$$\sigma_i A_i \sigma_j B_j = A_i B_j \left(\frac{1}{2}(\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i) + \frac{1}{2}(\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i)\right)$$

$$= A_i B_j \left(\frac{1}{2}\{\sigma_i, \sigma_j\} + \frac{1}{2}[\sigma_i, \sigma_j]\right)$$

$$= A_i B_j \left(\delta_{ij} + i\,\varepsilon_{ijk}\sigma_k\right)$$

Mas $A_i B_j \varepsilon_{ijk} = (\vec{A}\times\vec{B})_k$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_i A_i \sigma_j B_j = A_i B_i + i\sigma_k(\vec{A}\times\vec{B})_k} \quad \text{QED}$$

Em particular, se $\vec{A} = \vec{B} = \hat{m}$ a propriedade 6) resulta em

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{m})^2 = \hat{m}^2 + i\,\vec{\sigma} \cdot (\hat{m} \times \hat{m})$$

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{\sigma} \cdot \hat{m})^2 = \mathbb{1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{\sigma} \cdot \hat{m})^N = \begin{cases} \mathbb{1} & \text{se } N \text{ é par} \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{m} & \text{se } N \text{ é impar} \end{cases}}$$

$$\Rightarrow e^{-i \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{m}}{2} \phi} = \mathbb{1} - i\,\vec{\sigma} \cdot \hat{m} \frac{\phi}{2} - \frac{(\vec{\sigma} \cdot \hat{m})^2}{2!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^2$$

$$+ i \frac{(\vec{\sigma} \cdot \hat{m})^3}{3!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^3 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \hat{m})^4}{4!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^4 + \cdots$$

$$= \mathbb{1} - \frac{1}{2!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^4 + \cdots$$

$$- i\,\vec{\sigma} \cdot \hat{m} \frac{\phi}{2} + i\,(\vec{\sigma} \cdot \hat{m}) \frac{1}{3!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^3 + \cdots$$

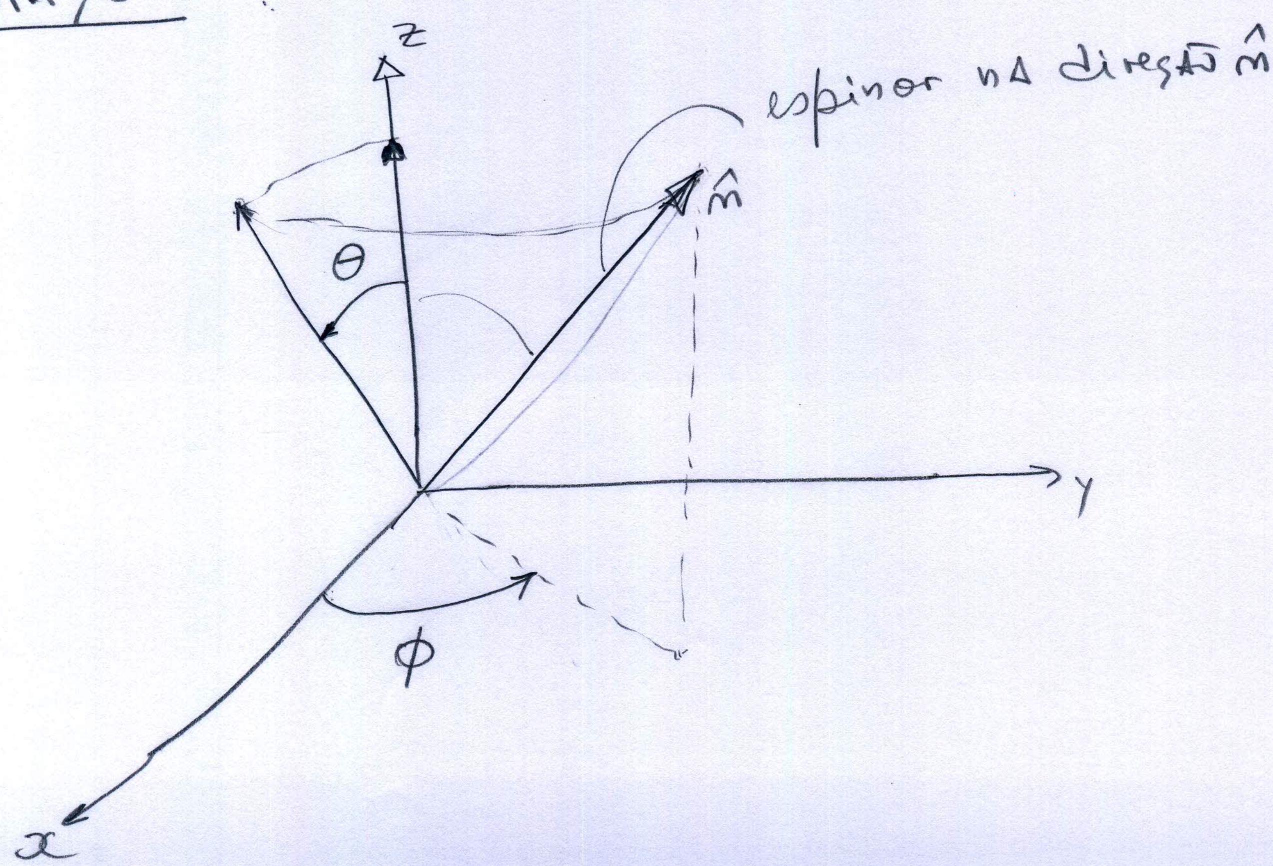
$$\Rightarrow \boxed{e^{-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{m}}{2}\phi} = \mathbb{1}\cos\phi/2 - i\,\vec{\sigma}\cdot\hat{m}\,\mathrm{sen}\,\phi/2}$$

Então, finalmente, queremos obter o spinor que é o autovetor do operador $\vec{S}\cdot\hat{m}$ com autovalor $\pm\frac{\hbar}{2}$, (e.g. para $\hat{m}=\hat{z} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$)

$\Rightarrow$ queremos achar os spinores χ_+, χ_-

$$\left[\ \vec{S}\cdot\hat{m}\,|\chi\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}\,|\chi\rangle\ \right]$$

A forma mais simples de obter χ é fazer <u>duas rotações</u>



<u>1ª rotação</u>: partindo de um espinor em $\hat{z}$ (eg $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$) rotamos ao redor $\hat{y}$ por um ângulo θ.

<u>2ª Rotação</u>: rotação ao redor de $\hat{z}$ por um ângulo ϕ, para chegar à direção $\hat{m}$.

$$\Rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar}S_z\phi}\, e^{-\frac{i}{\hbar}S_y\theta}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= e^{-i\sigma_3\frac{\phi}{2}}\, e^{-i\sigma_2\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \left(\mathbb{1}\cos\phi/2 - i\sigma_3 \operatorname{sen}\phi/2\right)\left(\mathbb{1}\cos\frac{\theta}{2} - i\sigma_2 \operatorname{sen}\theta/2\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\phi/2 - i\operatorname{sen}\phi/2 & 0\\ 0 & \cos\phi/2 + i\operatorname{sen}\phi/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -\operatorname{sen}\theta/2\\ \operatorname{sen}\theta/2 & \cos\theta/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}e^{-i\phi/2} & 0\\ 0 & e^{i\phi/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta/2\\ \operatorname{sen}\theta/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-i\phi/2}\cos\theta/2\\ e^{i\phi/2}\operatorname{sen}\theta/2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\chi_+(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\cos\theta/2 \\ e^{i\phi/2}\,\mathrm{sen}\,\theta/2 \end{pmatrix}}$$

Se começamos com $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ chegamos a

$$\boxed{\chi_-(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2}\,\mathrm{sen}\,\theta/2 \\ e^{i\phi/2}\cos\theta/2 \end{pmatrix}}$$