Aula ⑬ Momento Angular

No procedimento de separação de variáveis separando a parte angular da parte radial, introduzimos a constante de separação

$$C \equiv l.(l+1)$$

arbitrariamente. Depois vimos que a solução da parte radial perto de $r \to 0$ deve ser uma potência de l, i.e.:

$$R_{kl}(r) \sim r^l \times \text{Constante} \quad \text{para } r \to 0$$

portanto l é inteiro. Vamos ver no que segue que l está associado ao momento angular como operador. Para isso vamos primeiro a introduzir o operador momento angular de forma heurística. Mais tarde vamos fazê-lo de maneira mais formal.

Classicamente, o momento angular é definido por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Dado que em MQ, o operador $\vec{p}$ é

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$$

na base dos coordenadas $\{|\vec{r}\rangle\}$, então o operador momento angular é definido por

$$\vec{L} \equiv -i\hbar\,\vec{r}\times\vec{\nabla}$$

onde $\vec{r}$ é o operador vetor posição (que a gente chamava de X no caso de uma dimensão).

Podemos escrever os componentes do operador $\vec{L}$ em coordenadas cartesianas $\{x_1, x_2, x_3\}$ como

$$L_i = -i\hbar\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}X_j\frac{\partial}{\partial x_k}$$

onde o tensor de Levi-Civita é

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & , \text{ para permutação par de } 1,2,3 \\ -1 & , \text{ '' \quad '' ímpar de } 1,2,3 \\ 0 & , \text{ nos outros casos} \end{cases}$$

$\vec{L}$ Comuta com H (?)

O hamiltoniano é

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)$$

onde o potencial é central (i.e. $V(\vec{r}) = V(r)$).

Para calcular o comutador de $\vec{L}$ com H, primeiro calculamos os comutadores de L_i com x_i e com $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Para isso vamos precisar calcular

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, x_j\right]$$

Então, na base das coordenadas temos

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(x_j \psi) - x_j \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \frac{\partial x_j}{\partial x_k}\psi = \delta_{jk}\psi$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, x_j\right] = \delta_{kj}}$$

Também sabemos que

$$[x_i, x_j] = 0 \quad \forall\, i,j = 1,2,3$$

EntÃo,

$$[L_i, x_j] = \left[-i\hbar\,\epsilon_{irs} x_r \frac{\partial}{\partial x_s}, x_j\right] \leftarrow \sum_{r,s} \text{suprimida}$$

→ convenção de Einstein

$$= -i\hbar\left\{\epsilon_{irs} x_r \delta_{js} - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\epsilon_{irs} x_j x_r \frac{\partial}{\partial x_s}}\right\}$$

ou

$$[L_i, x_j] = -i\hbar\,\epsilon_{irs} x_r\left[\frac{\partial}{\partial x_s}, x_j\right] - i\hbar\,\epsilon_{irs}\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{[x_r, x_j]}\frac{\partial}{\partial x_s}$$

$$\Rightarrow [L_i, x_j] = -i\hbar\,\epsilon_{irs} x_r \delta_{sj}$$

$$\Rightarrow \boxed{[L_i, x_j] = -i\hbar\,\epsilon_{irj} x_r = i\hbar\,\epsilon_{ijk} x_k}$$

O comutador com o operador gradiente é

$$\left[L_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = -i\hbar\left[\epsilon_{irs} x_r \frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]$$

$$= -i\hbar\,\epsilon_{irs} x_r \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\left[\frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]} - i\hbar\,\epsilon_{irs}\underset{-\delta_{jr}}{\left[x_r, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]}\frac{\partial}{\partial x_s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[L_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = i\hbar\,\epsilon_{ijs}\frac{\partial}{\partial x_s}} \leftarrow \text{lembrando } \sum_s !$$

As duas identidades podem ser escritas em forma compacta como

$$\boxed{[L_i, V_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} V_k}$$

onde $V_k = x_k$ ou $\frac{\partial}{\partial x_k}$.

É possível ver que essa relação será obedecida também por qualquer vetor $\vec{V}$ que seja função de $\vec{r}$ ou de $\vec{\nabla}$. Por exemplo, podemos verificar que para $V_j = L_j$ temos

$$\boxed{[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k}$$

e.g. (provar) $[L_1, L_2] = i\hbar L_3$, etc

Finalmente, para mostrar que $\vec{L}$ comuta com o hamiltoniano, vemos que se $\vec{V}$ é um vetor que satisfaz o comutador com $\vec{L}$ derivado acima, então:

$$[L_i, V^2] = [L_i, V_j V_j] = [L_i, V_j] V_j + V_j [L_i, V_j]$$

$$= i\hbar \varepsilon_{ijk} V_k V_j + i\hbar \varepsilon_{ijk} V_j V_k$$

$$\Rightarrow \quad [L_i, V^2] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} \{V_k V_j + V_j V_k\} = 0 \, !$$

dado que $\{\ \}$ é simétrico em $j \longleftrightarrow k$.

$$\Rightarrow \quad \boxed{[L_i, V^2] = 0}$$

É importante notar que esse resultado não precisa que os componentes de $\vec{V}$ comutem!

Em particular, teremos

$$\boxed{[L_i, L^2] = 0}$$

sendo que $[L_i, L_j] \neq 0$.

Esse resultado, que L_i comuta com V^2, com $\vec{V}$ uma função de $\vec{r}$ ou de $\vec{\nabla}$, quer dizer que L_i comuta com r^2, e portanto com qualquer função de $r = \sqrt{r_j r_j}$,

E L_i comuta com $\nabla^2 = \nabla_j \nabla_j$, e portanto

$$\boxed{[L_i, H] = 0}$$

Um ponto crucial nessa demonstração foi que o hamiltoniano H depende de r^2 e ∇^2 e não de $\vec{r}$ ou $\vec{\nabla}$. Ou seja o hamiltoniano não depende explicitamente de ângulos de posição ou do momento.

$$\Rightarrow \quad [L_i, H] = 0 \quad \boxed{\text{se } H \text{ é invariante rotacional}}$$

Verdade para $V(\vec{r}) = V(r)$ potencial central

Finalmente, dado que

$$[L_i, L^2] = 0, \quad [L_i, H] = 0$$

também é verdade que (provar)

$$\boxed{[L^2, H] = 0}$$

$\Rightarrow$ O estado do sistema pode ser completamente determinado pelos autovalores de

$\{L_i, L^2, H\}$ onde L_i é uma dos componentes de $\vec{L}$, eg L_z

$\Rightarrow$ $\{H, L^2, L_z\}$ formam um conjunto completo de observáveis que comutam

Momento Angular em Coordenadas Polares :

Voltando para a definição de $\vec{L}$

$$\vec{L} = -i\hbar\, \vec{r} \times \vec{\nabla}$$

vamos escrever $\vec{\nabla}$ em coordenadas polares

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

onde $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ são os versores em polares.

Então temos:

$$\vec{L} = -i\hbar\; r\hat{r} \times \left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$

Mas lembrando que

$$\hat{r}\times\hat{\theta} = \hat{\phi}\;; \qquad \hat{r}\times\hat{\phi} = -\hat{\theta} \qquad \text{e obviamente } \hat{r}\times\hat{r} = 0$$

$$\vec{L} = -i\hbar\left(\hat{\phi}\frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{\theta}\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$

Para obter os componentes L_1, L_2 e L_3 em polares precisamos de lembrar das expressões de $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ em termos dos versores cartesianos $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ (ou $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, ou $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$, ...)

Temos que

$$\begin{cases} \hat{\theta} = \cos\theta \cos\phi \, \hat{x}_1 + \cos\theta \, \mathrm{sen}\phi \, \hat{x}_2 - \mathrm{sen}\,\theta \, \hat{x}_3 \\ \hat{\phi} = - \mathrm{sen}\,\phi \, \hat{x}_1 + \cos\phi \, \hat{x}_2 \end{cases}$$

Portanto,

$$\vec{L} = -i\hbar \left\{ \left(-\mathrm{sen}\,\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\theta \cos\phi \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \hat{x}_1 \right.$$

$$+ \left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\theta \, \mathrm{sen}\,\phi \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \hat{x}_2$$

$$\left. + \, \mathrm{sen}\,\theta \, \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta} \, \frac{\partial}{\partial\phi} \, \hat{x}_3 \right]$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} L_1 &= i\hbar \left(\mathrm{sen}\,\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \\ L_2 &= i\hbar \left(-\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta \, \mathrm{sen}\,\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \\ L_3 &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} \end{aligned} \right\}$$

Apartir daqui, também podemos calcular $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ (fazer em lista).

Isto resulta em

$$\boxed{L^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)}$$

Se agora lembramos da Eq de Schrödinger em coordenadas polares (aula 12)

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right) \psi(r,\theta,\phi) = E \psi(r,\theta,\phi)$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] + V(r) \right) \psi = E \psi$$

ou

$$\boxed{\frac{1}{2m} \frac{1}{r^2} \left[-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + L^2 \right] \psi + V\psi = E\psi}$$

Se agora re lembramos da separação de variáveis da aula anterior

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)\, Y(\theta,\phi)$$

Vemos que

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} Y \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{2\mu r^2} L^2(RY) + V(r) RY = ERY$$

Mas L^2 só atua na parte angular $Y(\theta,\phi)$

$\Rightarrow$ Dividindo por YR,

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \frac{1}{R} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{2\mu r^2} \frac{1}{Y} L^2 Y + (V(r) - E) = 0$$

ou

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{R} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) - \frac{2\mu r^2}{\hbar^2}\left(V(r) - E\right) \\ &- \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{Y} L^2 Y \quad = 0 \end{aligned} \right\}$$

Agora vamos comparar com o que obtivemos na aula passada?

→

O que tinhamos era:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}\left(V(r)-E\right)$$

$$+\frac{1}{Y}\left\{\frac{1}{\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right\}=0$$

Mas o segundo termo é basicamente L^2Y!

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left(V(r)-E\right)\\[2em] -\frac{1}{\hbar^2}\frac{1}{Y}L^2Y=0\end{array}\right\}$$

⇒ tinhamos o mesmo que agora (como deve ser)!
Mas agora podemos entender o significado da constante de separação.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left(V(r)-E\right)=C\equiv l(l+1)\\[2em] -\frac{1}{\hbar^2}\frac{1}{Y}L^2Y=-C=-l(l+1)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{L^2 Y(\theta,\phi) = \hbar^2 l(l+1)\, Y(\theta,\phi)}$$

$\Rightarrow$ { $\hbar^2 l(l+1)$ (ou $\hbar^2 C$) é o autovalor do operador L^2 atuando na autofunção $Y(\theta,\phi)$ }

vamos provar isto de maneira mais formal. Mas de fato já vemos que esta deve ser a ação do operador L^2 na função de onda

$$\boxed{L^2 \psi(r,\theta,\phi) = \hbar^2 l(l+1)\, \psi(r,\theta,\phi)}$$

para entender o significado de "$l(l+1)$" devemos ir mais longe no formalismo algébrico.

Autovalores de L^2 e L_z:

Lembrando que

$$[L_i, L^2] = 0 \quad \forall i = 1,2,3$$

vamos a usar o fato que isto implica que existe uma base comum de autoestados de L^2 e de uma das componentes de $\vec{L}$.

Só pode ser uma componente de $\vec{L}$, dado que as componentes não comutam entre elas.

Vamos escolher, arbitrariamente L_3 (ou L_z).

Os autoestados são

$$\{|\lambda\mu\rangle\}$$

onde

$$\left.\begin{aligned} L^2|\lambda\mu\rangle &= \lambda|\lambda\mu\rangle \\ \text{e} \quad L_z|\lambda\mu\rangle &= \mu|\lambda\mu\rangle \end{aligned}\right\}$$

Para obter os autovalores de L_z e L^2 é útil definir os operadores

$$\begin{cases} L_+ \equiv L_x + iL_y \\ L_- \equiv L_x - iL_y \end{cases}$$

Vamos precisar dos seus comutadores :

- $[L_z, L_\pm] = [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y]$

Mas lembrando

$$[L_i, L_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} L_k \quad e \quad 1,2,3 \leftrightarrow x,y,z$$

vemos que

$$[L_z, L_x] = [L_3, L_1] = i\hbar \underbrace{\varepsilon_{312}}_{\varepsilon_{123}=1} L_2 = i\hbar L_y$$

e, do mesmo jeito

$$[L_z, L_y] = [L_3, L_2] = i\hbar \underset{=-1}{\varepsilon_{321}} L_1 = -i\hbar L_x$$

$$\Rightarrow [L_z, L_\pm] = i\hbar L_y \pm i(-i\hbar)L_x$$

$$\Rightarrow \quad [L_z, L_\pm] = \hbar(\pm L_x + i L_y)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm}$$

Também, e usando $[L^2, L_i] = 0$, vemos que

$$\boxed{[L^2, L_\pm] = 0}$$

Se agora consideramos o estado

$$L_\pm |\lambda\mu\rangle$$

e calculamos

$$L^2 (L_\pm |\lambda\mu\rangle) = L_\pm (L^2 |\lambda\mu\rangle)$$ (usando $[L^2, L_\pm] = 0$)

$$= L_\pm (\lambda |\lambda\mu\rangle)$$

$$\boxed{L^2 (L_\pm |\lambda\mu\rangle) = \lambda (L_\pm |\lambda\mu\rangle}$$

$\Rightarrow$ $L_\pm |\lambda\mu\rangle$ é um autoestado de L^2 com autovalor λ

Por outra parte, usando o resultado para $[L_z, L_\pm]$ vemos que

$$L_z (L_\pm |\lambda\mu\rangle) = (L_z L_\pm - L_\pm L_z) |\lambda\mu\rangle + L_\pm L_z |\lambda\mu\rangle$$

$$= \pm \hbar L_\pm |\lambda\mu\rangle + L_\pm (\mu |\lambda\mu\rangle)$$

$$\boxed{L_z (L_\pm |\lambda\mu\rangle) = (\mu \pm \hbar) (L_\pm |\lambda\mu\rangle)}$$

$\Rightarrow$ $L_\pm |\lambda\mu\rangle$ é um autoestado de L_z, mas com autovalor incrementado (L_+) ou reduzido (L_-) em $\hbar$!

$L_\pm$ são operadores similares a a^+ e a no oscilador harmônico. São chamados de "ladder" ou operadores "escada".

Então, para um autovalor fixo λ do L^2, podemos mudar os autovalores de L_z por uma unidade de $\hbar$ aplicando L_+ e L_- sucessivamente. L_+ para aumentar o autovalor de L_z, L_- para diminui-lo.

Porém os autovalores de L_z não podem aumentar indefinidamente. Tem um valor máximo.

A razão é simples.

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

$$\Rightarrow \langle\lambda\mu|L_z^2|\lambda\mu\rangle = \langle L_z^2\rangle = \mu^2$$

e $$\langle\lambda\mu|L^2|\lambda\mu\rangle = \langle L^2\rangle = \lambda$$

e como $\langle L_x^2\rangle$ e $\langle L_y^2\rangle$ são ≥ 0

$$\Rightarrow \lambda = \langle L_x^2\rangle + \langle L_y^2\rangle + \mu^2 \geq \mu^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda \geq \mu^2}$$

$\Rightarrow$ Para cada λ existe um máximo valor de μ.

Então para $|\lambda\, \mu_{max}\rangle$ deve se satisfazer que

$$L_+ |\lambda\, \mu_{max}\rangle = 0$$

⇒ não temos um autovalor maior que μ_{max}.

Vamos chamar μ_{max} de

$$\mu_{max} \equiv \hbar l$$

Então temos

$$\left.\begin{aligned} &L_z |\lambda\, \mu_{max}\rangle = \hbar l\, |\lambda\, \mu_{max}\rangle \\ \text{e}\qquad &L^2 |\lambda\, \mu_{max}\rangle = \lambda\, |\lambda\, \mu_{max}\rangle \end{aligned}\right\}$$

<u>Notando que:</u>

$$\begin{aligned} L_\pm L_\mp &= (L_x \pm i L_y)(L_x \mp i L_y) \\ &= L_x^2 + L_y^2 \mp i L_x L_y \pm i L_y L_x \\ &= L_x^2 + L_y^2 \mp i (L_x L_y - L_y L_x) \\ L_\pm L_\mp &= L_x^2 + L_y^2 \mp i (i\hbar L_z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_\pm L_\mp = L^2 - L_z^2 \pm \hbar L_z$$

Então,

$$L^2 = L_\pm L_\mp + L_z^2 \mp \hbar L_z$$

e, aplicando L^2 desta forma à $|\lambda\,\mu_{max}\rangle$,

$$L^2|\lambda\,\mu_{max}\rangle = (L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z)|\lambda\,\mu_{max}\rangle$$

onde escolhemos (arbitrariamente) os sinais de baixo.

$$\Rightarrow L^2|\lambda\,\mu_{max}\rangle = (0 + \hbar^2 l^2 + \hbar^2 l)|\lambda\,\mu_{max}\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{L^2|\lambda\,\mu_{max}\rangle = \hbar^2 l(l+1)|\lambda\,\mu_{max}\rangle}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \hbar^2 l(l+1)}$$

⇒ o autovalor de L^2 é dado em função do máximo autovalor de L_z, $\hbar l$ (μ_{max})

Podemos fazer o mesmo exercício para o mínimo autovalor de L_z, μ_{min}, lembrando que

$$\lambda \geq \mu^2$$

Então:

$$L_- |\lambda \mu_{min}\rangle = 0$$

Definindo μ_{min} como

$$L_z |\lambda \mu_{min}\rangle = \hbar \bar{l} |\lambda \mu_{min}\rangle$$

Novamente, temos que

$$L^2 |\lambda \mu_{min}\rangle = (L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z) |\lambda \mu_{min}\rangle$$

onde agora usamos os sinais de cima em L^2.

$$\Rightarrow L^2 |\lambda \mu_{min}\rangle = (0 + \hbar^2 \bar{l}^2 - \hbar^2 \bar{l}) |\lambda \mu_{min}\rangle$$

$$= \underbrace{\hbar^2 \bar{l}(\bar{l}-1)}_{\lambda} |\lambda \mu_{min}\rangle$$

Mas λ ainda deve ser o mesmo autovalor

$$\Rightarrow \quad \lambda = \hbar^2 \bar{l}(\bar{l}-1) = \hbar^2 l(l+1)$$

⇒ $\boxed{\bar{l} = -l}$

⇒ o <u>mínimo</u> <u>autovalor</u> de L_z para um dado autovalor (fixo) de L^2, $\hbar^2 l(l+1)$

é

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{min} = -\hbar l \\ \\ \mu_{max} = +\hbar l \end{array} \right\}$$

e

Então, se em geral chamamos os autovalores de L_z de

$$\mu \equiv \hbar m$$

Vemos que

$$\boxed{-l \le m \le l}$$

e que a sucessiva aplicação de L_+ ou L_- <u>muda m em passos inteiros de $\underline{\underline{1}}$</u>

$$\Rightarrow \quad L_+|l,m\rangle \longrightarrow |l,m+1\rangle$$

Tal que $L_z(L_+|l,m\rangle) = \hbar(m+1)(L_+|l,m\rangle)$

Os estados $|\lambda,\mu\rangle$ são escritos como

$$\{|l,m\rangle\}$$

Dado que m (autovalor de $L_z/\hbar$) e l fixam os autovalores de L_z e L^2.

Autofunções de L^2 e L_z:

Os autoestados projetados na base de posição $\{|\vec{r}\rangle = |r,\theta,\phi\rangle\}$ são as autofunções de L^2 e L_z

Começamos com $L_z = L_3$. Na base de posição ele é dado por

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\Rightarrow \quad L_z Y_l^m(\theta,\phi) = -i\hbar\frac{\partial Y_l^m(\theta,\phi)}{\partial\Phi} = \hbar\, m\, Y_l^m(\theta,\phi)$$

$\Rightarrow$ Dependência em ϕ e $Y_l^m(\theta,\phi) \sim e^{im\phi}$ ✓

E, como já sabemos,

$$L^2 Y_\ell^m(\theta,\phi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_\ell^m(\theta,\phi)$$

é satisfeita pelos harmônicos esféricos.

$\Rightarrow$ {Harmônicos esféricos $Y_\ell^m(\theta,\phi)$ São os autofunções de L_z e L^2

com $-\ell \leq m \leq \ell$

e ℓ o <u>máximo</u> valor de m.

Entre $-\ell$ e ℓ tem N possíveis passos com L_+ onde N é um número inteiro positivo.

$$\Rightarrow \quad \ell = -\ell + N$$

ou $2\ell = N \rightarrow \boxed{\ell = \frac{N}{2}}$

$\Rightarrow$ {ℓ pode tomar valores inteiros ou semi-inteiros!}