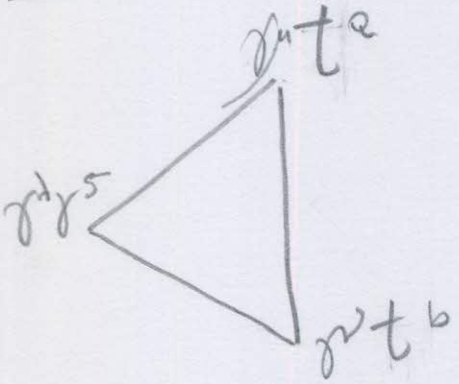
# Anomalias IV — Algumas Consequências — L23

. Teorias de Gauge Não-Abelianas




$+ \; \mu \longleftrightarrow \nu$

$\Rightarrow$ Podemos recalcular todos e obteremos

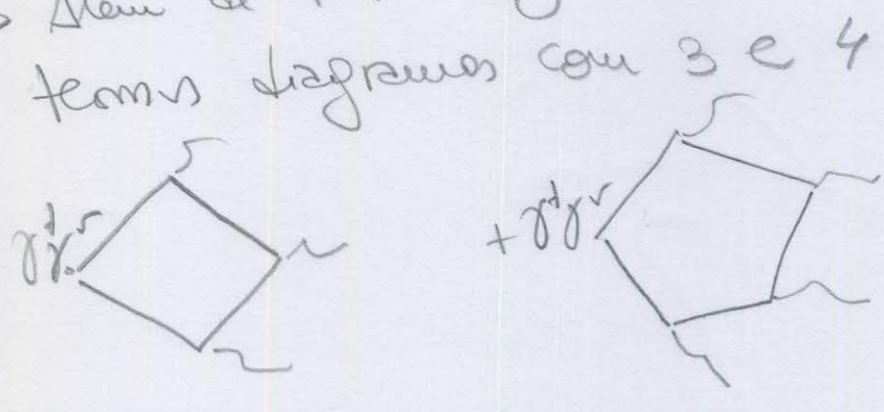
$$\partial_\mu J^\mu_A = -\frac{g^2}{16\pi^2}\,\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F^a_{\alpha\beta} F^b_{\mu\nu}\, \mathrm{Tr}[t^a t^b]$$

usando $\mathrm{Tr}[t^a t^b] = \frac{1}{2}\delta^{ab}$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu J^\mu_A = -\frac{g^2}{16\pi^2}\,\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F^a_{\alpha\beta} F^a_{\mu\nu}}$$

$\Rightarrow$ Além de ter diagramas com $J^\mu_A$ e 2 bósons de gauge temos diagramas com 3 e 4 bósons de gauge



- Decaimento $\pi^0 \to \gamma\gamma$

QCD com 2 (ou 3) sabores de quarks

$$\mathcal{L} = \bar{u}\, i\not{D}\, u + \bar{d}\, i\not{D}\, d - m_u \bar{u}u - m_d \bar{d}d$$

$m_u = m_d = 0 \Rightarrow$

$$\mathcal{L} = \bar{Q}_L\, i\not{D}\, Q_L + \bar{Q}_R\, i\not{D}\, Q_R \Rightarrow SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1) \times U(1)$$

$$\left.\begin{aligned} Q_L &\to U_L Q_L \\ Q_R &\to U_R Q_R \end{aligned}\right\} SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_L \times U(1)_R$$

Correntes dos $U(1)_L$ e $U(1)_R$

$$J^\mu_L = \bar{Q}_L \gamma^\mu Q_L \qquad J^\mu_R = \bar{Q}_R \gamma^\mu Q_R$$

correspondem a $\mathcal{L} = \bar{u}_L\, i\not{D}\, u_L + \bar{d}_L\, i\not{D}\, d_L + \bar{u}_R\, i\not{D}\, u_R + \bar{d}_R\, i\not{D}\, d_R$

Correntes dos $SU(2)_L \times SU(2)_R$

$$J^{\mu a}_L = \bar{Q}_L \gamma^\mu t^a Q_L \qquad J^{\mu a}_R = \bar{Q}_R \gamma^\mu t^a Q_R$$

com $t^a$ geradores de $SU(2)$ ($L$ ou $R$).

$t^a$ $SU(2)$ de sabor!

Lembrar que para obter as correntes, eg. $J^{\mu a}_L$:

$$U_L = e^{i\alpha_L t^a} \quad \text{considerando } \alpha_L^a = \alpha_L^a(x)$$

$$\Rightarrow Q_L \longrightarrow Q'_L = e^{i\alpha_L^a(x) t^a}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}'_L = \bar{Q}_L U_L^\dagger \, i\not\partial \, U_L Q_L$$

$$= \bar{Q}_L i\not\partial Q_L - \bar{Q}_L \gamma^\mu t^a Q_L \partial_\mu \alpha^a_{(x)}$$

$$J^{\mu a}_L = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \alpha^a_L(x))} = \bar{Q}_L \gamma^\mu t^a Q_L$$ (a menos de um sinal arbitrário de $\alpha_L^a(x)$.)

etc.

---

Correntes Vetoriais e Axiais:

$$J^\mu_L + J^\mu_R = J^\mu_V \; ; \quad J^\mu_R - J^\mu_L = J^\mu_A$$

$$J^{\mu a}_L + J^{\mu a}_R = J^{\mu a}_V \; ; \quad J^{\mu a}_R - J^{\mu a}_L = J^{\mu a}_A$$

Simetria da QCD

$$SU(2)_V \times SU(2)_A \times U(1)_V \times U(1)_A$$

$SU(2)_V$ ↓ isospin

$U(1)_V$ ↓ número bariônico

A "BAIXAS" energias

$$\left.\begin{array}{l} SU(2)_L \times SU(2)_R \Rightarrow SU(2)_V \\ \\ \text{ou} \quad SU(2)_A \times SU(2)_V \Rightarrow SU(2)_V \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ 3 NGBs $(\pi^+, \pi^0, \pi^-)$

$SU(2)_A$ espontaneamente quebrada $\Rightarrow$ o $\pi^a$ tem $m_\pi = 0$ (no limite quiral $m_u = m_d = 0$)

$\Rightarrow$ $|0\rangle$ e $|\pi^a\rangle$ são estados conectados por transformações de simetria $SU(2)_A$

A corrente axial $J_A^{\mu a}$ conecta $\pi^a$ e o vácuo

$$\langle 0 | J_A^{\mu a} | \pi^b(p) \rangle = +i p^\mu f_\pi \delta^{ab} e^{-ip.x}$$

Isto é a versão covariante de $Q|0\rangle \neq 0 = |\underset{\pi}{\alpha}\rangle$

$\Rightarrow \langle 0 | J_A^{0a} | \pi^b \rangle = 0$.

$$\Rightarrow \langle 0 | \partial_\mu J_A^{\mu a} | \pi^b(p) \rangle = f_\pi \delta^{ab} \underbrace{p^2}_{m_\pi^2} e^{-ip.x} = 0$$

$\Rightarrow$ a corrente axial é (seria se não fosse pela anomalia) conservada mesmo que espontaneamente quebrada.

Sob transformações Axiais

$$\left.\begin{array}{l}\psi_L \to e^{i\alpha_L}\psi_L \\ \psi_R \to e^{i\alpha_R}\psi_R\end{array}\right\}$$ Axial quer dizer $\alpha_L = -\alpha_R = -\alpha$
vetorial : $\alpha_L = \alpha_R$

$\Rightarrow$ Se é axial

$$\left.\begin{array}{l}\psi_L \to e^{-i\alpha}\psi_L \\ \psi_R \to e^{i\alpha}\psi_R\end{array}\right\} \Rightarrow \psi = \psi_L + \psi_R \to e^{-i\alpha}\psi_L + e^{i\alpha}\psi_R$$

$\Rightarrow$ podemos descrever essa transformação com

$$\psi \to e^{i\alpha\gamma_5}\psi = e^{i\alpha\gamma_5}\psi_L + e^{i\alpha\gamma_5}\psi_R$$

$$\text{mas}\left\{\begin{array}{l}\gamma_5\psi_L = -\psi_L \\ \gamma_5\psi_R = +\psi_R\end{array}\right\} \Rightarrow \psi \to e^{i\alpha\gamma_5} = e^{-i\alpha}\psi_L + e^{i\alpha}\psi_R$$

Sob transformações $SU(2)_A$ o NGB (pion) se transforma com:

$$e^{i\frac{\pi^a}{f_\pi}} \longrightarrow e^{i\alpha}\, e^{i\frac{\pi^a}{f_\pi}}$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{\pi^a}{f_\pi} \longrightarrow \frac{\pi^a}{f_\pi} + \alpha\right\}$$ O NGB "shifts"

⇒ Se voltamos à integral funcional

Vimos que a medida da IF muda por

$$\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \longrightarrow e^{i\int d^4x\, \alpha \frac{e^2}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}}\, \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}$$

Isto é equivalente a fazer

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \alpha \frac{e^2}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}$$

Se integramos os férmions fora, por exemplo para obter a $\mathcal{L}_{eff}[\pi,\gamma]$ das interações entre $\pi$ e fótons devemos adicionar um termo a $\mathcal{L}_{eff}$ para que

$$\mathcal{L}_{eff} \longrightarrow \mathcal{L}_{eff} + \alpha \frac{e^2}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}$$

toda vez que fazemos um transformação quiral $SU(2)_A$. Em particular devemos adicionar o termo

$$\frac{\pi^0}{f_\pi}\frac{e^2}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \quad \text{à } \mathcal{L}_{eff}.$$

Dado que $\frac{\pi^0}{f_\pi} \to \frac{\pi^0}{f_\pi} + \alpha$

$\Rightarrow \mathcal{L}_{eff} \longrightarrow \mathcal{L}_{eff.} + \alpha$ ✓

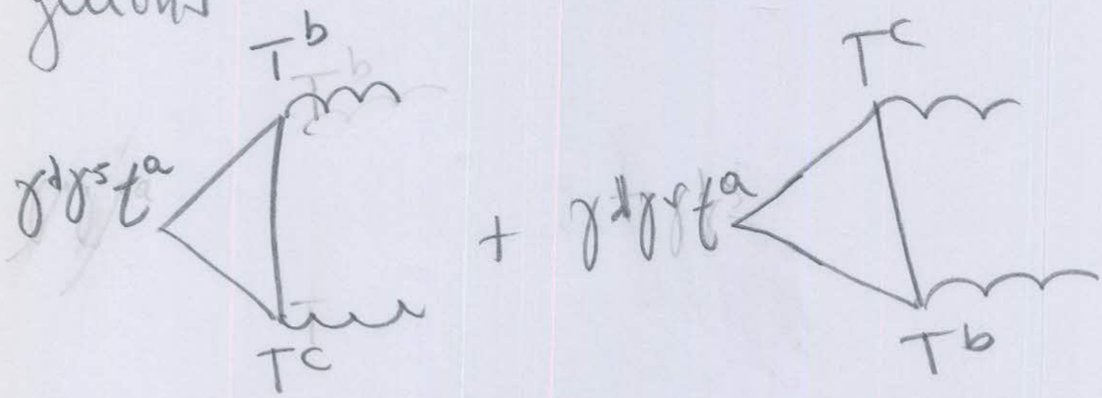
$\Rightarrow$ A $\mathcal{L}_{eff}$ inclue um termo para $\pi^0 \to \gamma\gamma$ cuja normalização é fixa pela lei de transformação de $\mathcal{L}_{eff}$ requerida pela lei de transformação dos férmions.

Calculando $\Gamma[\pi^0 \to \gamma\gamma]$ com essa $\mathcal{L}_{eff}$ o resultado está de acordo com $\Gamma_{exp}(\pi^0 \to \gamma\gamma)$ com uma discrepância menor que 5%. (devido à $m_u, m_d \neq 0$).

- <u>Anomalias com Glúons</u>



Se considerarmos a corrente Axial $\underline{J_A^{\mu a}}$ com glúons




$$\Rightarrow \partial_\mu J_A^{\mu a} = -\frac{g^2}{16\pi^2} Tr\left[t^a T^b T^c\right] \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu}^b F_{\alpha\beta}^c$$

onde $T^b, T^c$ SÃO os geradores de $SU(3)_c$.

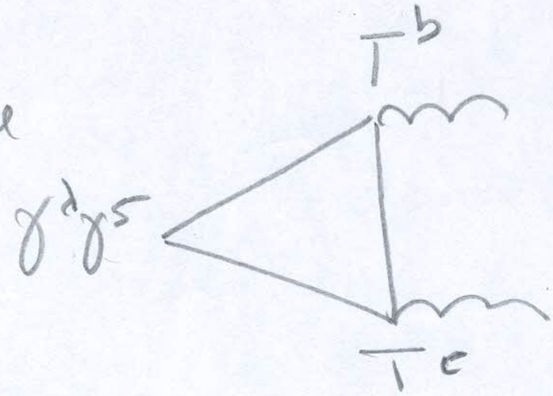
MAS $Tr[t^a T^b T^c] = Tr[t^a]\, Tr[T^b T^c] = 0$

$\Rightarrow$ a corrente axial de isospin <u>não é anômala</u>

Porém, a corrente axial $J^\mu_A$ (Iso singleto)

$$\partial_\mu J^\mu_A = -\frac{g^2}{16\pi^2}\, Tr\left[T^b T^c\right] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F^b_{\mu\nu} F^c_{\alpha\beta}$$

vindo de




$+ \quad b \leftrightarrow c$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu J^\mu_A = -\frac{g^2}{32\pi^2}\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F^b_{\mu\nu} F^b_{\alpha\beta} \neq 0}$$

$\Rightarrow$ Corrente associada à $U(1)_A$ é anômala.

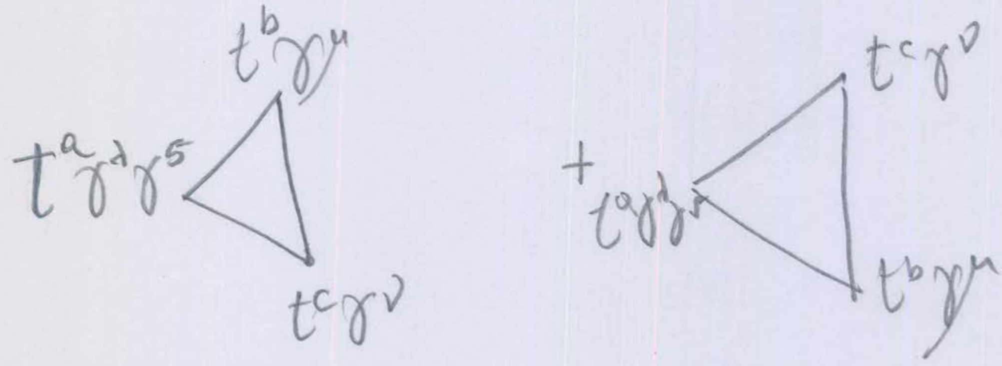
$\Rightarrow$ { Simetria $U(1)_A$ não pode ser espontaneamente quebrada, dado que é anômala.

$\Rightarrow \quad m_{\eta'} > m_{\pi,K}$

$\eta'$ não é um pNGB ($U(1)_A$ problem)

# Teorias de Gauge Quirais

Se agora consideramos todos os correntes como acoplados com bósons de gauge




Usando a decomposição em simétrica e anti-simétrica

$$Tr[t^b t^c t^a] = \frac{1}{2} D^{abc} + \frac{i}{2} N f^{abc}$$

$$Tr[t^c t^b t^a] = \frac{1}{2} D^{abc} - \frac{i}{2} N f^{abc}$$

onde a parte simétrica é:

$$D^{abc} = Tr\left[t^a \{t^b, t^c\}\right]$$

e onde $Tr[t^a t^b] = N\delta^{ab}$

Para que as teorias de gauge sejam consistentes

$$D^{abc} = 0$$

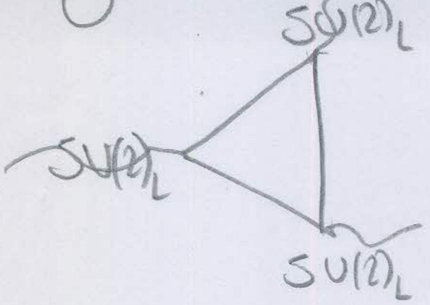
$\forall$ os bósons de gauge que se acoplam com férmions no loop.

<u>Exemplo</u> $SU(2)_L$ com

| | $SU(3)$ | $SU(2)_L$ | $Q$ |
|---|---|---|---|
| $Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$ | 3 | 2 | $\begin{pmatrix} 2/3 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ |
| $L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix}$ | 1 | 2 | $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ |

$\Rightarrow$ <u>Modelo Padrão só com dubletos (1 família)</u>

Diagrama 1

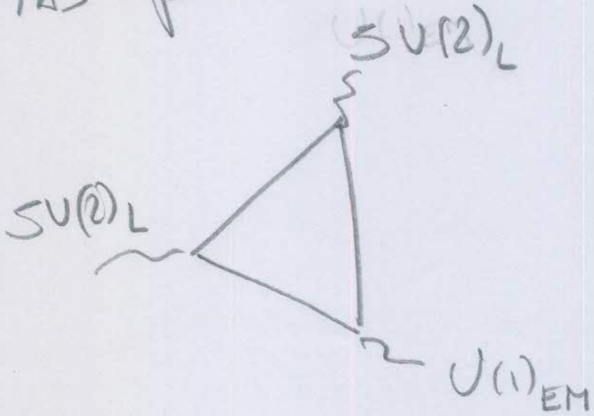



$$: D^{abc} = \mathrm{Tr}\left[\frac{\sigma^a}{2}\left\{\frac{\sigma^b}{2}, \frac{\sigma^c}{2}\right\}\right]$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\frac{\sigma^a}{2}\,\frac{\delta^{bc}}{2}\right] = \frac{1}{4}\delta^{bc}\,\mathrm{Tr}[\sigma^a]$$

$$D^{abc} = 0 \quad \checkmark$$

Mas podemos ter




$$: D^{abc} = \mathrm{Tr}\left[Q\left\{\frac{\sigma^b}{2}, \frac{\sigma^c}{2}\right\}\right]$$

$$= \frac{\delta^{bc}}{2}\,\mathrm{Tr}[Q]$$

onde o traço é uma soma sob o dubleto de quarks e de léptons:

$$3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) + 0 - 1 = 0 \quad \checkmark !$$

$\Rightarrow$ Precisamos ter um número igual de quarks e léptons!

Em geral se consideramos o MP (1 família) temos:

| | $SU(3)_c$ | $SU(2)_L$ | $U(1)_Y$ |
|---|---|---|---|
| $Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$ | 3 | 2 | $\frac{1}{6}$ |
| $L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix}$ | 1 | 2 | $-\frac{1}{2}$ |
| $u_R$ | 3 | 1 | $\frac{2}{3}$ |
| $d_R$ | 3 | 1 | $-\frac{1}{3}$ |
| $e_R$ | 1 | 1 | $-1$ |

Precisamos checar todas as possíveis anomalias!

Eg: $SU(3) \times U(1)_Y \times U(1)_Y$

$$\Rightarrow D^{abc} = Tr[t^a Y_q Y_q] = \underbrace{Tr[t^a]}_{=0} \sum Y_q^3 = 0$$

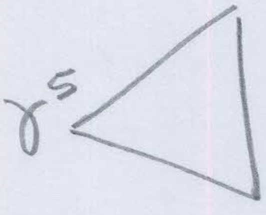
Eg: $SU(3) \times SU(3) \times U(1)_Y$

$\gamma_5 \psi_L = -\psi_L$

$$D^{abc} = Tr[t^a t^b Y_q]$$

$$= Tr[t^a t^b] \times \sum_q Y_q = \frac{\delta^{ab}}{2}\left(-2\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0$$

onde usamos que



dado que para ter uma anomalia precisamos de 1 (ou 3!) $\gamma^5$ e que $\gamma^5 \psi_L = -\psi_L$ e $\gamma^5 \psi_R = +\psi_R$

quando calculamos $D^{abc}$, férmion de mão esquerda contam com $\ominus$ e de mão direita com $\oplus$.

Ej $U(1)_Y \times U(1)_Y \times U(1)_Y$

$$\Rightarrow D^{abc} = \mathrm{Tr}[Y^3] = \sum_f Y_f^3$$

$$= -2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + (-1)^3 - 3\left(2\left(\frac{1}{6}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right) = 0$$

Anomalia de Grávitons(!) com $U(1)_Y$

$$\sim \mathrm{Tr}[Y] = -3\,2\left(\frac{1}{6}\right) - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 3 - 1$$

$$= -1 + 1 + 2 - 1 - 1 = 0$$