Introdução à Física de Partículas

Prof. Gustavo Burdman

Lista 3

1. Mostre que se ψ é um fermion de massa m obedecendo

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

cada uma das suas quatro componentes satisfaz a equação de Klein-Gordon.

2. Mostre que $(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = |\vec{p}|^2$.

3. Usando as relações de ortogonalidade para os espinores de energia positiva $u^{(s)}$ e de energia negativa $v^{(s)}$:

$$u^{(r)\dagger}\, u^{(s)} = 2E\, \delta_{rs}, \qquad v^{(r)\dagger}\, v^{(s)} = 2E\, \delta_{rs}\ ,$$

mostre que

(a)

$$\bar{u}^{(r)}\, u^{(s)} = 2m\, \delta_{rs}, \qquad \bar{v}^{(r)}\, v^{(s)} = 2m\, \delta_{rs}\ ,$$

(b) Definindo $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$

$$u^{(s)}\, \bar{u}^{(s)} = \not{p} + m, \qquad v^{(s)}\, \bar{v}^{(s)} = \not{p} - m\ ,$$

4. O Hamiltoniano de Dirac descrevendo um fermion livre de massa m é dado por

$$\mathcal{H} = i\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \alpha_4\, m$$

Se o operador momento angular orbital é $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$, e definimos o operador

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que $[\mathcal{H}, \vec{L}] = -i\vec{\alpha} \times \vec{p}$. O que isto quer dizer em relação ao momento angular orbital $\vec{L}$?

(b) Mostre que $[\mathcal{H}, \vec{S}] = i\vec{\alpha} \times \vec{p}$, e que portanto o operador $\vec{J} \equiv \vec{L} + \vec{S}$ está associado a uma grandeza conservada.

5. Usando as propiedades das matrizes γ^μ, mostre que $\not{p}\,\not{p} = p^2$

6. Mostre que para que a equação de Dirac seja invariante sob uma transformação de Lorentz Λ^μ_ν, a transformação do espinor dada por $\psi'(x') = S\psi(x)$ deve satisfazer

$$S\gamma^\mu S^{-1} = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$$

7. Considere o processo $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ na QED, onde m_e é a massa do eletron e m_μ é a do múon.

   (a) Desenhe todos os diagramas de Feynman contribuindo. Explique detalhadamente.

   (b) Escreva a amplitude do processo.

8. Repita o exercício anterior para o processo $e^+e^= \to e^+e^-$.

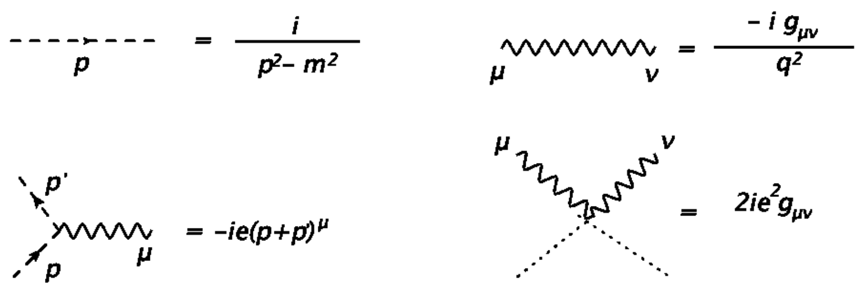
9. Considere a lagrangeana de um campo escalar complexo acoplado a um campo de gauge de uma simetria $U(1)$ local.

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

onde

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi\ ,$$

e o tensor de gauge $U(1)$ é $F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$. As regras de Feynman da teorias são:



   (a) Desenhe os diagramas de Feynman contribuindo em menor ordem em teoria de perturbações ao processo $\phi^*\phi \to \gamma\gamma$.

   (b) Calcule a amplitude.

   (c) Escolha um diagrama e calcule a amplitude ao quadrado. Calcule a sua contribuição na distribuição angular $d\sigma/d\cos\theta$.