Introdução à Física de Particulas

Prof. Gustavo Burdman

Lista 2

1. Mostre que a invariância do intervalo entre dois eventos $(t^2 - |\vec{x}|^2)$ sob tranformações de Lorentz é satisfeita se definimos o 4-vetor posição $x^\mu \equiv (t; \vec{x})$, tal que

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\, x^{\nu}$$

onde definimos as transformações de Lorentz como Λ^{μ}_{ν}. A transformação de Lorentz inversa definida por $x^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu}\, x'^{\mu}$, satifaz

$$\Lambda^{\nu}_{\mu}\, \Lambda^{\mu}_{\nu} = 1$$

2. Considere as transformações de Lorentz em notação matricial

$$x' = Ax \ ,$$

onde

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \ ,$$

e A é uma matriz de 4×4.

   (a) Usando que a norma de x, definida como $x^T g x$, onde $x^T = (x^0 x^1 x^2 x^3)$ e g é a matriz da métrica, é invariante, mostre que

$$A^T g A = g$$

   onde A^T e a matriz transposta da transformação de Lorentz.

   (b) Mostre que o determinante de A satisfaz $det(A) = \pm 1$.

   (c) As A's com $det(A) = +1$ chamam se tranformações de Lorentz próprias, porque podem ser obtidas a pártir de deformações contínuas da identidade. Dê um exemplo de transformações impróprias, i.e. com $det(A) = -1$.

3. Mostre que o diferencial de volume no espaço de Minkowski, definido por $d^4x \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$, é invariante sob transformações de Lorentz. (Dica: Mostre que o Jacobiano da transformação $x' = Ax$ é $J = det(A)$.)

4. A métrica do espaço de Minkowski é dada por

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; ,$$

   (a) Mostre que o intervalo corresponde ao produto interno ao quadrado do 4-vetor posição definido por $x.x \equiv x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$.

   (b) Mostre que, se definimos o 4-vetor covariante $x_\mu \equiv (t; -\vec{x})$, podemos escrever $x.x = x^\mu x_\mu$. Chamamos o x^μ de 4-vetor contra-variante.

   (c) Verifique que $x_\mu = g_{\mu\nu}\, x^\nu$, e que $x^\mu = g^{\mu\nu}\, x_\nu$.

5. Mostre que a relação de dispersão relativista $E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2$, onde m é a massa invariante da partícula, é consistente com definir o 4-vetor momento como $P^\mu = (E; \vec{p})$.

6. Definindo os operadores diferenciais

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \equiv (\frac{\partial}{\partial t}; \vec{\nabla}) \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu \equiv (\frac{\partial}{\partial t}; -\vec{\nabla})$$

   (a) Obtenha a equação de Klein-Gordon com as identificações

$$E \to i\frac{\partial}{\partial t} \qquad\qquad \vec{p} \to -i\vec{\nabla}$$

   (b) Mostre que, se definimos o 4-vetor corrente $J^\mu \equiv (\rho; \vec{j})$, com ρ e $\vec{j}$ a densidade de carga e corrente respetivamente, a equação de continuidade é equivalente a

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$