Simetrias

A14 (1)

⟹ Leis de conservação

- Inv. wrt. translações em t ⟹ $\boxed{E \text{ conservado}}$ $\left(\frac{\partial H}{\partial t} = 0\right)$

- Inv. wrt. translações em $\vec{x}$ ⟹ $\boxed{\vec{p} \text{ é conservado}}$

- Inv. wrt. rotações ⟹ $\boxed{\text{Cons. do momento angular } \vec{L}}$

- Inv. de Gauge no EM ⟹ $\boxed{\text{Cons. da Corrente EM}}$

Grupos: simetrias sob certas transformações que tem as seguintes propriedades

1. Clausura: se $a, b \in G$

$\Rightarrow \quad ab = c$ com $c \in G$

2. Associatividade:

$a(bc) = (ab)c$

3. Elemento neutro ou Identidade:

$\exists\, e \,/\, ea = ae = a$ para todo $a \in G$

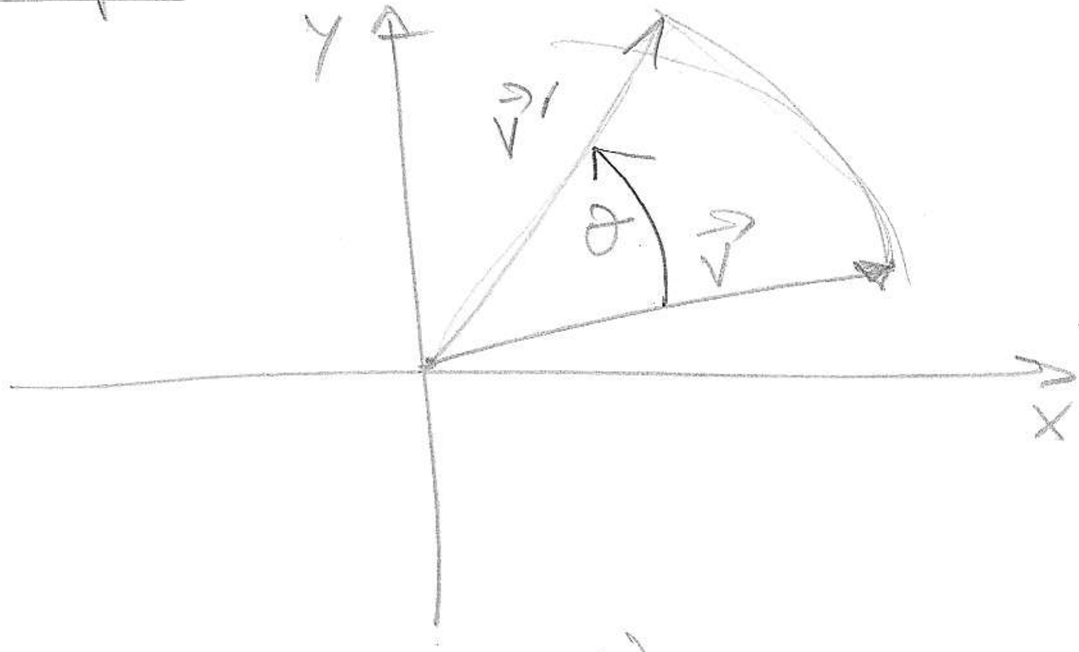
4. Inverso: Para todo $a \in G$

$\exists\, a^{-1} \,/\, a^{-1}a = aa^{-1} = e$

5) Commutatividade: Se a operação é commutativa $\Rightarrow$ G é Abeliano.

Se não é $\Rightarrow$ G é Não-Abeliano

Exemplo: Rotações no Plano



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} ; \quad \vec{v}' = \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}' = R(\theta)\, \vec{v}$$

$R(\theta)$: matriz de 2×2

- Real
- Deve satisfazer que $R^T(\theta) \cdot R(\theta) = \mathbb{1}$

Pq? Preservação da medida (tamanho do vetor, módulo)

$$|\vec{v}'|^2 = (v')^T v' = (v'_x \ v'_y) \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = v'^2_x + v'^2_y$$

MAIS

$$(V')^T = (R(\theta) V)^T = V^T R^T(\theta)$$

$$\Rightarrow |\vec{V}'|^2 = V^T R^T(\theta) R(\theta) V$$

se $|\vec{V}'|^2 = |\vec{V}|^2 \Rightarrow R^T(\theta) R(\theta) = \mathbb{1}$

$$\Rightarrow \boxed{R^T(\theta) = R^{-1}(\theta)}$$

Determinant:

$$\det(R^T R) = 1$$

$$\det R^T \det R = 1$$

MAS $\det R^T = \det R \Rightarrow (\det R)^2 = 1$

ou $\boxed{\det R = \pm 1}$

MAS para preservar orientação da base

$$\Rightarrow \boxed{\det R = 1}$$

$\Rightarrow$ Matrizes de 2x2, ortogonais com $\det = 1$

$$\Rightarrow \boxed{SO(2)}$$

SO(2)

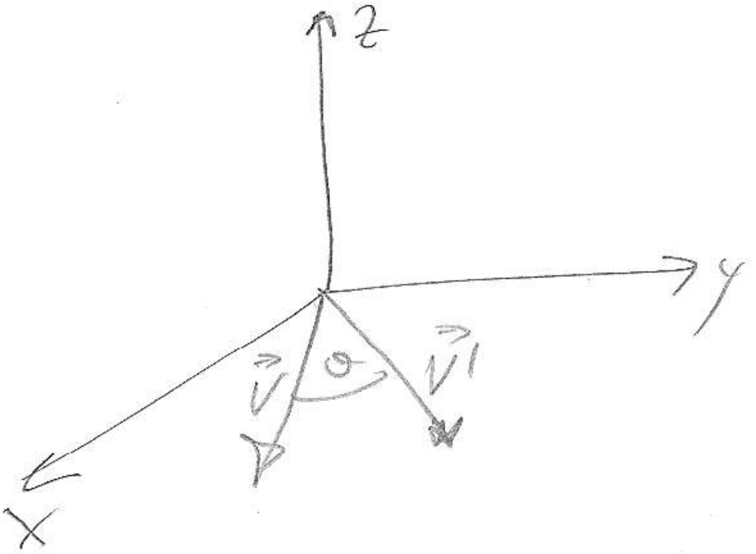
$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

único!

$R(0) = \mathbb{1}$, etc...

é Abeliano (só no plano!)

Em 3D SO(3)



Rotação ao redor do $\hat{z}$ (counter clockwise)

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Em geral, $R_{\hat{m}}(\theta) \Rightarrow$ NÃO são comutativas

$$\boxed{R_{\hat{m}'}(\theta') R_{\hat{m}}(\theta) \neq R_{\hat{m}}(\theta) R_{\hat{m}'}(\theta')}$$

$\Rightarrow$ SO(3) é NÃO-Abeliano

Outro tipo de Grupo é Unitário

$\Rightarrow$ Matrizes NÃO são Reais

Mas $U^{-1} = U^{\dagger} \equiv (U^{T})^{*}$

$\Rightarrow$ Grupo de matrizes unitárias de $N \times N$ é $U(N)$

Se pedir $\det U = 1 \Rightarrow \boxed{SU(N)}$

Exemplo SU(2)

Matrizes de 2x2, $\det U = 1$

Podemos escrever

$$\left.\begin{array}{l} U = e^{iA} \\ U^{-1} = e^{-iA} \end{array}\right] \quad \underline{\text{ok } (\text{se } A^{\dagger} = A)}$$

$$\det U = 1 \Rightarrow e^{i\,\mathrm{Tr}[A]} = 1 \Rightarrow \boxed{\mathrm{Tr}[A] = 0}$$

$\Rightarrow A$: 2x2, traço nulo, (hermitianas: $A^{\dagger} = A$)

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$$

$$\Rightarrow A = -\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}$$

$$\longrightarrow \boxed{U = e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}}} \quad \text{elementos de SU(2)}$$

Aplicações?

Spin

Sistema de spin $\vec{S} = \frac{1}{2}$.

Estados:

$$\left.\begin{array}{l} |\tfrac{1}{2}\ {+\tfrac{1}{2}}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ |\tfrac{1}{2}\ {-\tfrac{1}{2}}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$ autoestados de $\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{p}$ com $\pm\frac{1}{2}$ autovalores

O estado mais geral é:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aqui
- $|\alpha|^2$ é a probabilidade que uma medição da helicidade (ou S_z) dei $+\frac{1}{2}$
- $|\beta|^2$ probabilidade que $h = S_z = -\frac{1}{2}$.

Eles satisfazem $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$\Rightarrow$ Identificamos $S_z = \frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{p} = \frac{1}{2}\sigma_3$

E $S_x = \frac{1}{2}\sigma_1$

$S_y = \frac{1}{2}\sigma_2$

Como se transforma o espinor $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ sob rotações?

$$\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix} = U(\vec{\theta})\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

$U(\vec{\theta})$ é uma matriz unitária: $U^\dagger = U^{-1}$, de determinante $\mathbb{1}$. $\Rightarrow$ podemos escrevê-la como

$$U = e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2} \;!$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\vec{\sigma}}{2} = \vec{S} \text{ : "geradores" das rotações dos espinores.}}$

$\vec{\theta}$ é arbitrário

Comentário

NAS ROTAÇÕES no espaço com vetores SO(3). Geradores são $\vec{L}$!

$$\vec{V}' = R\,\vec{V}'$$

MAS o rotador quântico a ser rotador

$$|\alpha'\rangle = e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{L}}\,|\alpha\rangle!$$

— o —

Outro Exemplo Simetrias de Sabor

"Isóspin": Simetria que relaciona

$$p \Longleftrightarrow n \qquad \begin{pmatrix} m_p = 938.28 \text{ MeV} \\ m_n = 931.57 \text{ MeV} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Forças fortes não distinguem entre p e n (só as forças EM)

$\Rightarrow$ Se representamos o próton como um estado de "isospin" $+\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad \boxed{I_z \text{ ou } I_3 = +\frac{1}{2}}$$

E o neutron, de isospin $-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{I_3 = -\frac{1}{2}}$

$$n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ é um "nucleon"

Forças fortes tem simetria interna de Isospin ⇒

$$N' = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = e^{-i\vec{\theta}.\vec{I}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

da as mesmas interações fortes.

$\Rightarrow \boxed{\vec{I} \text{ é conservado}}$ (Teorema de Noether)

<u>outras partículas com Isospin</u> (HADRONS)

- Λ tem $I = 0 \Rightarrow \Lambda = |0 0\rangle$

- Δ, $I = 3/2 \Rightarrow 4$ estados

$\Delta^{++} = |\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle$; $\Delta^{+} = |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$; $\Delta^{0} = |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$; $\Delta^{-} = |3/2, -\frac{3}{2}\rangle$

- $\vec{\pi}$ é $\vec{I} = 1 \Rightarrow$

$|1, 1\rangle = \pi^{+}$; $\pi^{0} = |1, 0\rangle$; $\pi^{-} = |1, -1\rangle$

Espalhamento N, N

Estados de 2 N podem ser

$I = 1$ (isotripleto)

$$\left\{\begin{aligned} |1\,1\rangle &= pp \\ |1\,0\rangle &= \frac{(pn + np)}{\sqrt{2}} \\ |1\,-1\rangle &= nn \end{aligned}\right\}$$ simétricos sob $n \Leftrightarrow p$

ou $I = 0$ $\quad |0\,0\rangle = \frac{(pn - np)}{\sqrt{2}}$ anti-simétrico

(Isosingleto)

$\Rightarrow$ Deuteron : pn é $\boxed{I = 0}$ pq. é um estado só

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} &① \; pp \longrightarrow d\,\pi^+ \\ &② \; pn \longrightarrow d\,\pi^0 \\ &③ \; nn \longrightarrow d\,\pi^- \end{aligned}\right\}$$

Vemos que com $I_d = 0$ $I_\pi = 1$
os estados são todos de $I = 1$
antes e depois. Não há $|00\rangle$ (total)

→ $A_{①}$, $A_{②}$ e $A_{③}$ relacionados pela simetria

i.e.: pp é o $|1\,1\rangle = pp$

mp é o $|1\,0\rangle = \frac{pn + np}{\sqrt{2}}$

nn é o $|1\,-1\rangle = nn$

⇒ $\frac{A_{②}}{A_{①}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{A_{③}}{A_{①}} = 1$

ou $\boxed{\sigma_{②} = \frac{1}{2}\,\sigma_{①} \qquad \sigma_{③} = \sigma_{①}}$

↳ Exp. testar dentro dos erros exp
e do fato que ∃ correções (quebra!)
da simetria de ~~I~~ Isospin pelo EM!